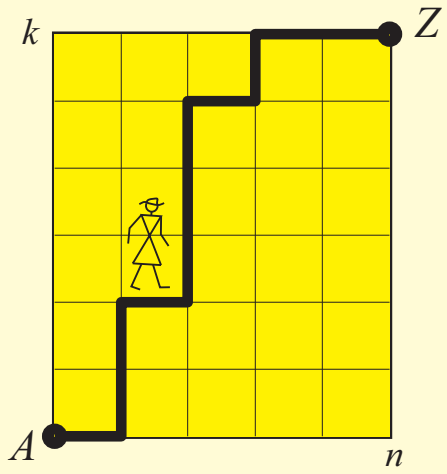
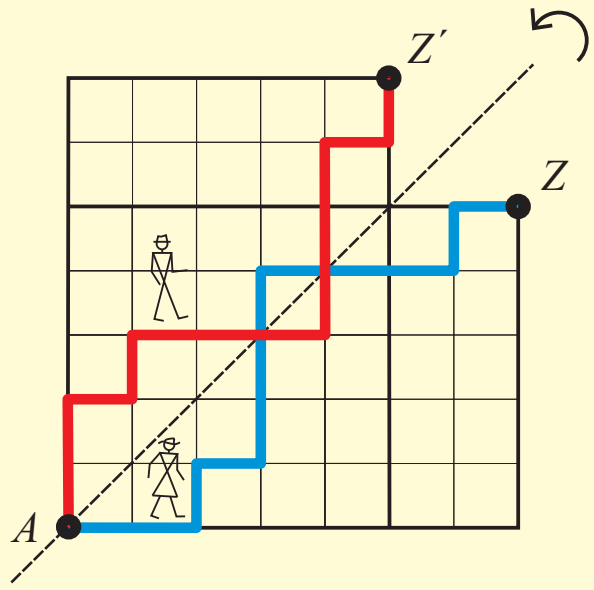
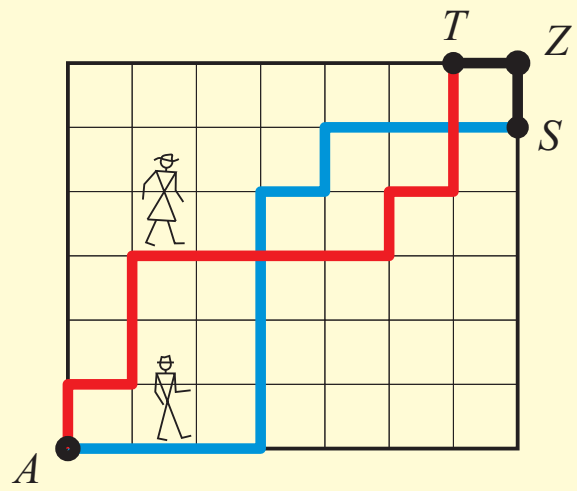
SPACERKIEM PO KRACIE



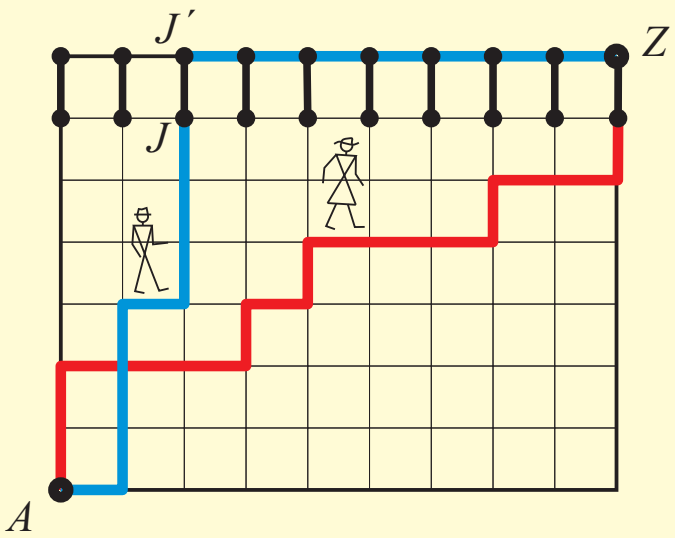
$$\binom{n+k}{k}$$



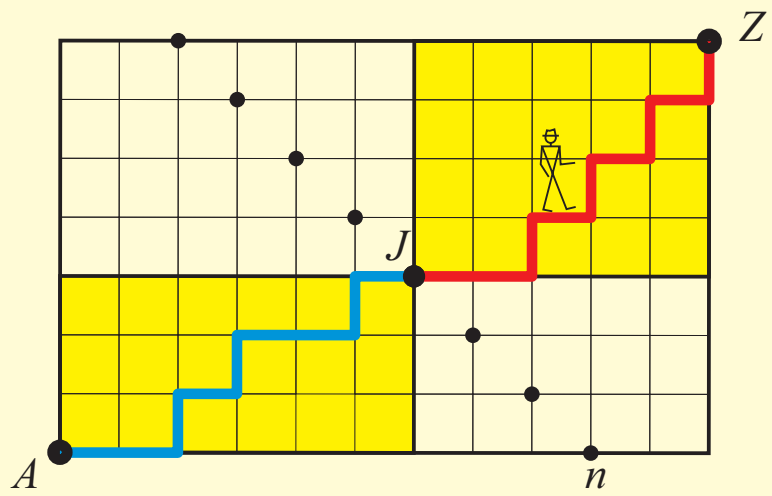
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



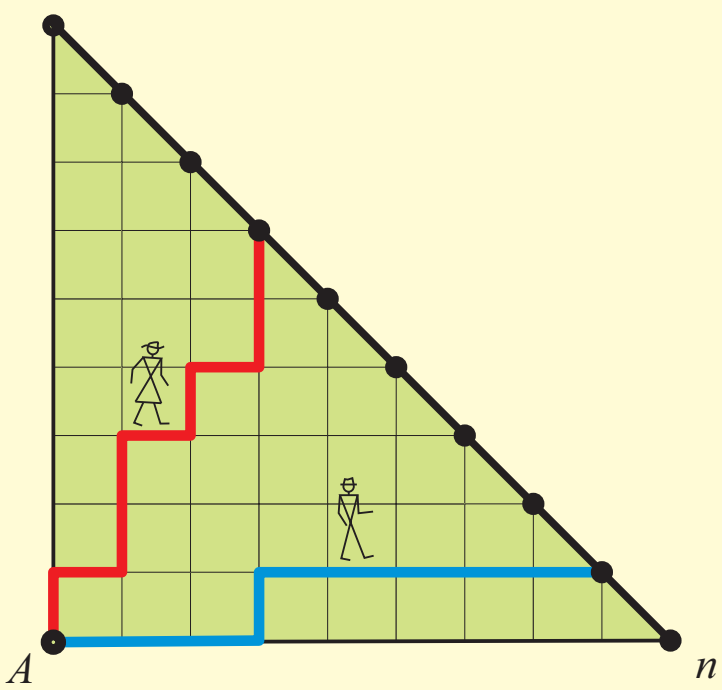
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$



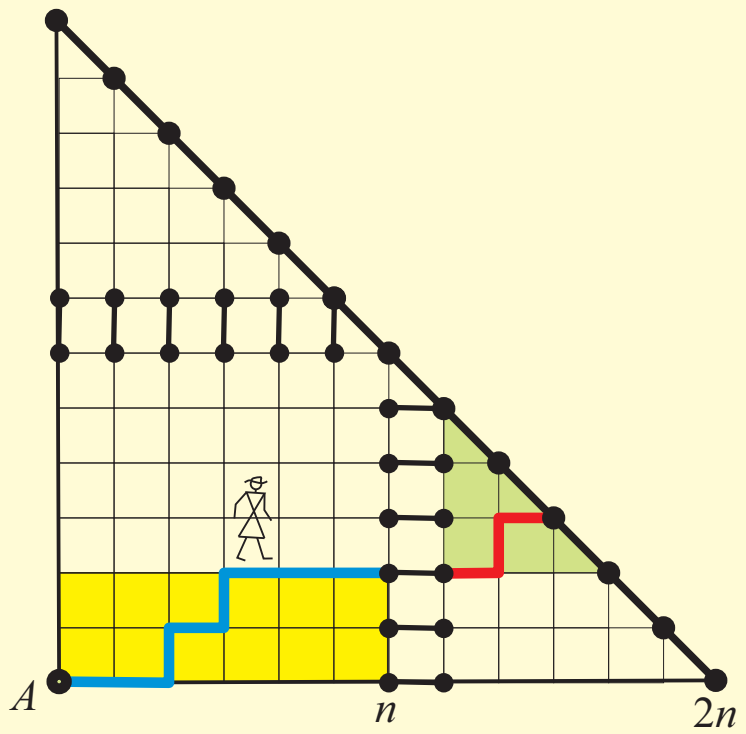
$$\binom{k}{k} + \ldots + \binom{k+j}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$



$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$



$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{j} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$



$$2^n\binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n+1}{1} + \ldots + 2\cdot 2^{n-j-1}\binom{n+j}{j} + \ldots + \binom{2n}{n} = 2^{2n}$$

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Opracowanie i druk plakatu współfinansowane przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SPACERKIEM PO KRACIE

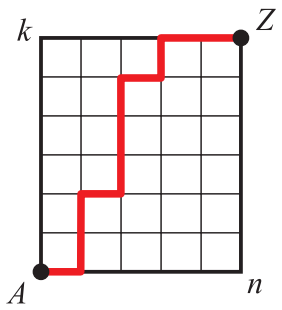
Beata Bogdańska

(1) Na rysunku 1 dany jest prostokąt o całkowitych długościach boków, z zaznaczoną siatką kwadratów jednostkowych. Prostokąt ten ma k wierszy i n kolumn. Stawiamy takie pytanie:

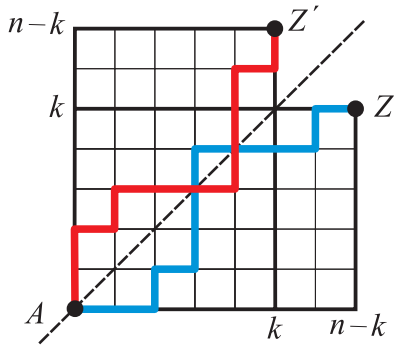
Ile jest najkrótszych dróg przejścia po liniach siatki z wierzchołka A do wierzchołka Z?

Oznaczmy przez $\mathcal{D}(A, Z)$ zbiór wszystkich takich dróg.

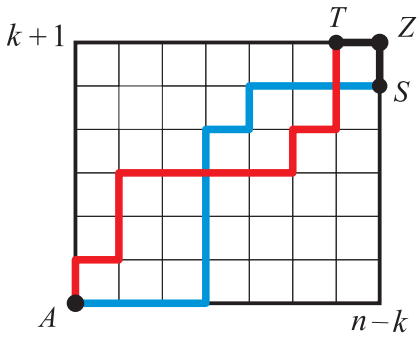
Chwila zastanowienia wystarcza do stwierdzenia, że każda droga należąca do zbioru $\mathcal{D}(A, Z)$ ma długość $n+k$ (bez względu na sposób przejścia musimy zrobić dokładnie k kroków jednostkowych *w górę* i dokładnie n kroków jednostkowych *w prawo*). Co więcej, oznaczając przez **G** krok jednostkowy w górę, a przez **P** krok jednostkowy w prawo, widzimy, że każda taka droga jest jednoznacznie wyznaczona przez swój *kod* będący ciągiem długości $n+k$ o wyrazach ze zbioru $\{\mathbf{G}, \mathbf{P}\}$, w którym k razy występuje litera **G** i n razy występuje litera **P**. Drogi należące do $\mathcal{D}(A, Z)$ nazywamy w dalszym ciągu **PG**-*drogami*. Na przykład **PG**-droga z rysunku 1 (gdzie mamy $n = 5$, $k = 6$) jest *zakodowana* przez 11-wyrazowy ciąg (**P**, **G**, **G**, **P**, **G**, **G**, **G**, **P**, **G**, **P**, **P**). Numery miejsc, na których w kodzie danej **PG**-drogi występuje litera **G**, tworzą k-elementowy *podzbiór* zbioru $\{1, 2, \ldots, n+k\}$. I odwrotnie, każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru wyznacza jednoznacznie położenie liter **G** w kodzie **PG**-drogi. Widzimy w ten sposób wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość (bijekcję) między zbiorem $\mathcal{D}(A, Z)$, a zbiorem wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n+k\}$. Na przykład **PD**-droga z rysunku 1 odpowiada podzbiorowi $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 11\}$.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Przypomnijmy, że symbolem $\binom{s}{t}$ oznaczamy liczbę t-elementowych podzbiorów zbioru s-elementowego. Napis $\binom{s}{t}$ czytamy *es po te* i nazywamy **symbolem** lub **współczynnikiem dwumiennym**. Zgodnie z powiedzianym wyżej, mamy więc

$$|\mathcal{D}(A, Z)| = \binom{n+k}{k}. \tag{1}$$

Ogólnie, jeżeli $A = (a, b)$, $Z = (c, d)$, gdzie $a \leqslant c$, $b \leqslant d$, są dwoma punktami kratowymi, to

$$|\mathcal{D}(A, Z)| = \binom{d+c-b-a}{d-b}.$$

Na pozostałych sześciu rysunkach plakatu pokazujemy, jak można wykorzystać opisaną tym sposobem interpretację współczynników dwumiennych $\binom{s}{t}$ dla zobaczenia prawdziwości kilku tożsamości z takimi współczynnikami w roli głównej.

(2) Rysunek 2 pokazuje, dlaczego prawdziwa jest **tożsamość symetrii**. Mianowicie, odbicie w zaznaczonej dwusiecznej wyznacza bijekcję między zbiorem $\mathcal{D}(A,\, Z)$ a zbiorem $\mathcal{D}(A,\, Z')$. Stąd równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

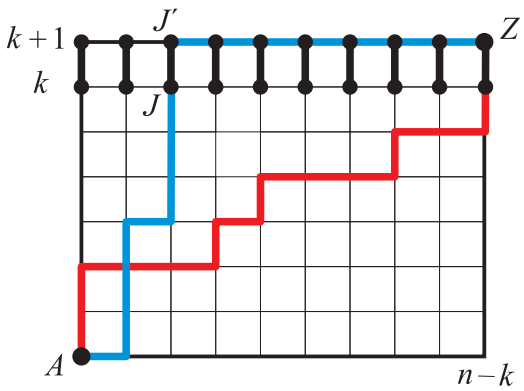
(3) Rysunek 3 pokazuje, dlaczego prawdziwa jest **tożsamość Pascala**:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{3}$$

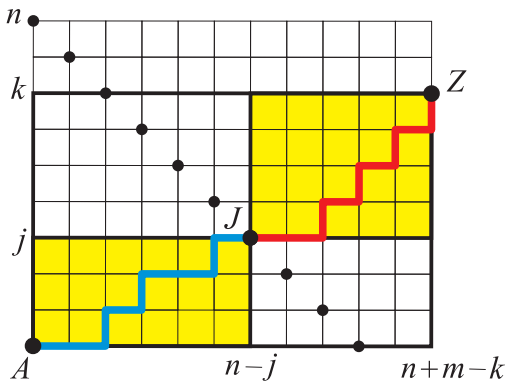
Należy zauważyć, że równość (3) jest równoważna równości:

$$|\mathcal{D}(A,\, Z)| = |\mathcal{D}(A,\, S)| + |\mathcal{D}(A,\, T)|,$$

którą łatwo zobaczyć. Zbiór $\mathcal{D}(A,\, Z)$ wszystkich **PG**-dróg łączących punkt $A = (0,\, 0)$ z punktem $Z = (n-k,\, k+1)$ jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów: podzbioru tych **PG**-dróg, które przechodzą przez punkt $S = (n-k,\, k)$, ich jest $\binom{n}{k}$, oraz podzbioru tych **PG**-dróg, które przechodzą przez punkt $T = (n-k-1,\, k+1)$, tych jest $\binom{n}{k+1}$.



rys. 4



rys. 5

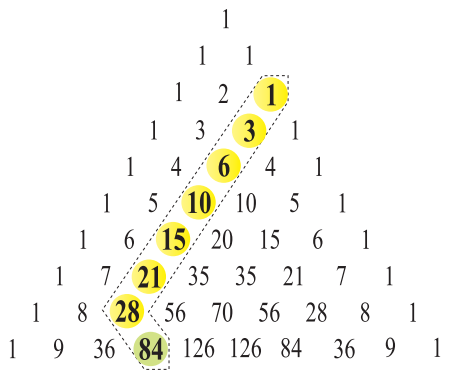
(4) Na rysunku 4 pokazujemy interpretację **tożsamości sumowania równoległego**. Przyglądając się temu rysunkowi widzimy, że zbiór $\mathcal{D}(A,\, Z)$ jest sumą rozłącznych podzbiorów $\mathcal{D}_j$, dla $j = 0,\, 1,\, \ldots\, ,n-k$. Przez $\mathcal{D}_j$ oznaczamy podzbiór zbioru $\mathcal{D}(A,\, Z)$ składający się z tych dróg, które przechodzą przez *bramkę* $\overline{JJ'}$, czyli przez odcinek o końcach $(j,\, k)$, $(j,\, k+1)$ i następnie (nie mając już innego wyboru) prowadzą cały czas w prawo aż do punktu Z. Jasne jest, że zbiór $\mathcal{D}_j$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{D}(A,\, J)$. Stąd dostajemy równość

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{4}$$

U w a g a. Ogół wszystkich współczynników dwumiennych $\binom{n}{k}$, dla $0 \leqslant k \leqslant n$, wygodnie jest zorganizować w tak zwany **trójkąt Pascala**. W n-tym wierszu tego trójkąta ustawiamy kolejno liczby

$$\binom{n}{0},\, \binom{n}{1},\, \ldots\, ,\, \binom{n}{n}.$$

Robimy to tak, by było widać tożsamość (3): każdy wyraz jest sumą dwóch stojących nad nim z lewej i prawej strony. Wyrazy z lewej strony sumy (4) leżą na prostej równoległej do boku trójkąta Pascala. Stąd się bierze nazwa tożsamości. Ponieważ wyrazy lewej

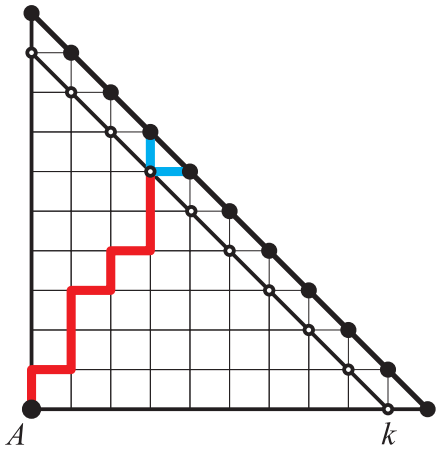


strony i prawej strony łącznie tworzą „hak” w trójkącie Pascala, więc równość (4) nazywamy również **twierdzeniem o haku**.

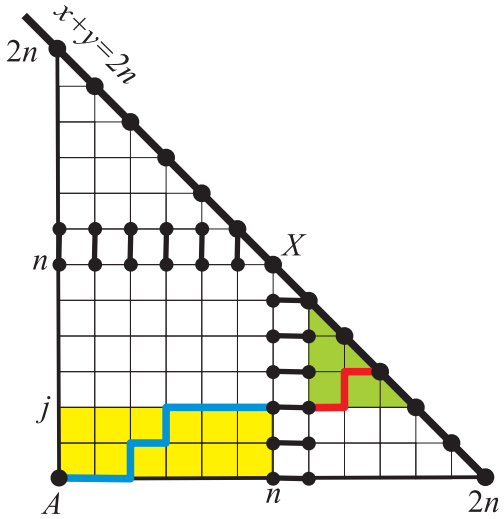
(5) Na rysunku 5 pokazujemy interpretację tak zwanej **tożsamości Cauchy'ego**:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\cdots+\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}. \tag{5}$$

Prawa strona równości (5) oznacza, jak wiemy, liczbę wszystkich **PG**-dróg łączących punkt $A=(0,\,0)$ z punktem $Z=(n+m-k,\,k)$. Każda rozważana droga musi przejść przez jeden i tylko jeden punkt kratowy leżący na prostej o równaniu $x+y=n$. Składnik $\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ sumy z lewej strony równości (5) oznacza liczbę tych z rozważanych dróg, które przechodzą przez punkt $J=(n-j,\,j)$. Rzeczywiście, ponieważ droga przechodząca przez punkt J składa się z dwóch niezależnych kawałków: jednego od A do J i drugiego od J do Z, więc liczba tych dróg równa jest iloczynowi $|\mathcal{D}(A,\,J)|\cdot|\mathcal{D}(J,\,Z)|$, czyli iloczynowi $\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$. To dowodzi równości (5).



rys. 6



rys. 7

(6) Doskonale rozumiemy znaczenie sumy stojącej z lewej strony równości

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n. \tag{6}$$

Suma ta jest równa liczbie wszystkich **PG**-dróg zaczynających się w punkcie $A=(0,\,0)$ i kończących się w pewnym takim punkcie $(x,\,y)$, że $x+y=n$. Oznaczmy przez $\mathcal{D}(A;\,n)$ zbiór wszystkich takich **PG**-dróg. Dla dowodu równości (6) musimy więc wykazać, że $|\mathcal{D}(A;\,n)|=2^n$.

Popatrzmy na rysunek 6. Widzimy, że każda droga należąca do $\mathcal{D}(A;\,k+1)$ dochodzi do prostej o równaniu $x+y=k$, czyli ma fragment należący do $\mathcal{D}(A;\,k)$, a następnie ma 2 możliwości dotarcia do punktu na prostej o równaniu $x+y=k+1$. To pokazuje, że

$$|\mathcal{D}(A;\,k+1)|=2|\mathcal{D}(A;\,k)|.$$

Mamy stąd kolejno $|\mathcal{D}(A;\,n)|=2\,|\mathcal{D}(A;\,n-1)|=4\,|\mathcal{D}(A;\,n-2)|=\ldots=2^{n-1}\,|\mathcal{D}(A;\,1)|=2^n$.

(7) Na rysunku 7 rozbijamy zbiór $\mathcal{D}(A;\,2n)$ wszystkich **PG**-dróg łączących początek A z punktami prostej $x+y=2n$ na $2n+1$ rozłącznych podzbiorów:

$$\mathcal{A}_0,\ \mathcal{A}_1,\ \ldots,\ \mathcal{A}_{n-1},\ \mathcal{C},\ \mathcal{B}_0,\ \mathcal{B}_1,\ \ldots,\ \mathcal{B}_{n-1},$$

gdzie zbiór $\mathcal{A}_j$ składa się ze wszystkich **PG**-dróg przechodzących przez bramkę poziomą o końcach w punktach $(n,\,j)$ i $(n+1,\,j)$, zbiór $\mathcal{C}$ jest równy $\mathcal{D}(A,\,X)$, gdzie $X=(n,\,n)$, a zbiór $\mathcal{B}_j$ składa

się ze wszystkich **PG**-dróg przechodzących przez bramkę pionową o końcach $(j,\, n)$ i $(j,\, n+1)$. Dzięki dotychczasowej wiedzy możemy napisać równości:

$$|\mathcal{A}_j| = \binom{n+j}{j} \cdot 2^{n-j-1}, \quad |\mathcal{B}_j| = \binom{n+j}{n} \cdot 2^{n-j-1}, \quad |\mathcal{C}| = \binom{2n}{n}.$$

Wobec tego

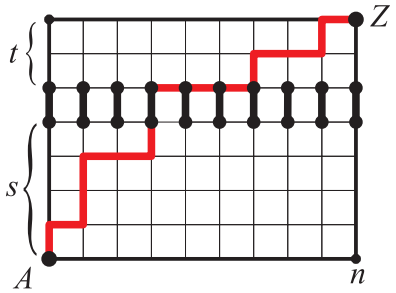
$$|\mathcal{D}(A;\, 2n)| = (|\mathcal{A}_0| + |\mathcal{B}_0|) + (|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{B}_1|) + \ldots + (|\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{B}_{n-1}|) + |\mathcal{C}|.$$

Stąd, wobec oczywistej równości $|\mathcal{A}_j| = |\mathcal{B}_j|$ dla każdego j, zobacz (2), mamy

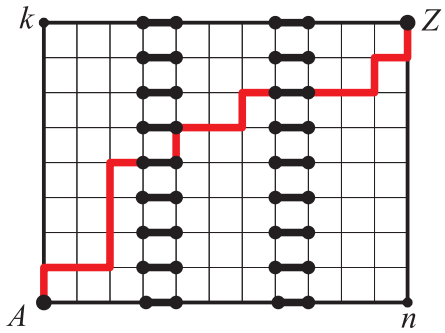
$$2^n \binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n+1}{1} + \ldots + 2\binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n} = 2^{2n}. \tag{7}$$

♢ ♢ ♢

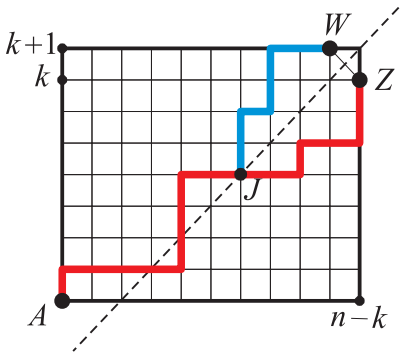
Na zakończenie proponujemy jeszcze trzy zadania w podobnym duchu.



rys. 8



rys. 9



rys. 10

Zadanie 1. Posługując się rysunkiem 8 udowodnić **uogólnioną tożsamość sumowania równoległego**:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{s+j}{s}\binom{n-j+t}{t} = \binom{n+s+t+1}{n}.$$

Zadanie 2. Jaką tożsamość można wyczytać z rysunku 9?

Zadanie 3. Przyglądając się rysunkowi 10 udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 2$ ciąg

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{s},$$

gdzie $s = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, jest ciągiem rosnącym.
Wskazówka. Odbijając ostatni fragment każdej drogi ze zbioru $\mathcal{D}(A,\, Z)$ w symetralnej odcinka $\overline{ZW}$, otrzymujemy jedną spośród dróg ze zbioru $\mathcal{D}(A,\, W)$.