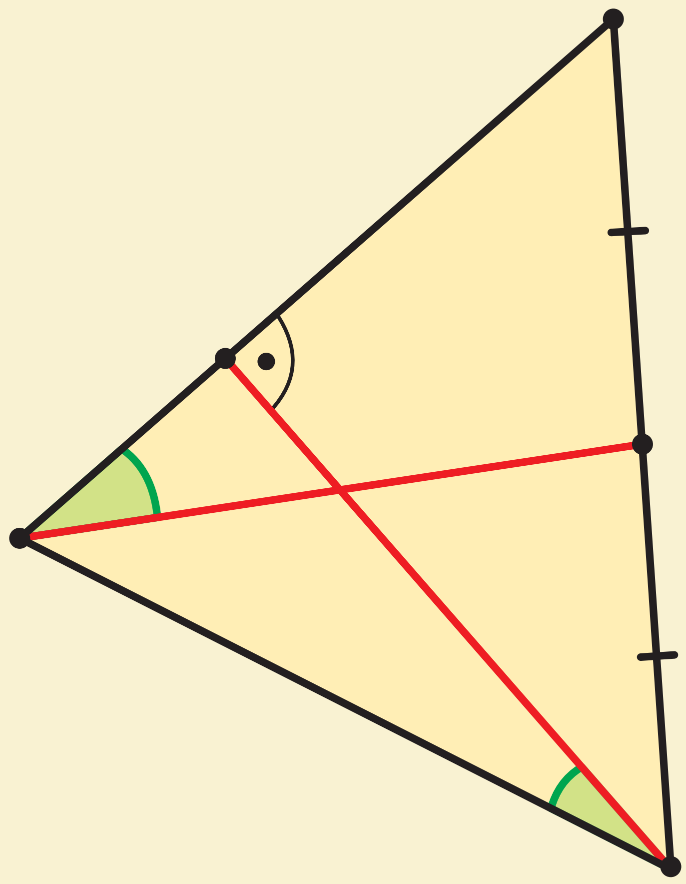
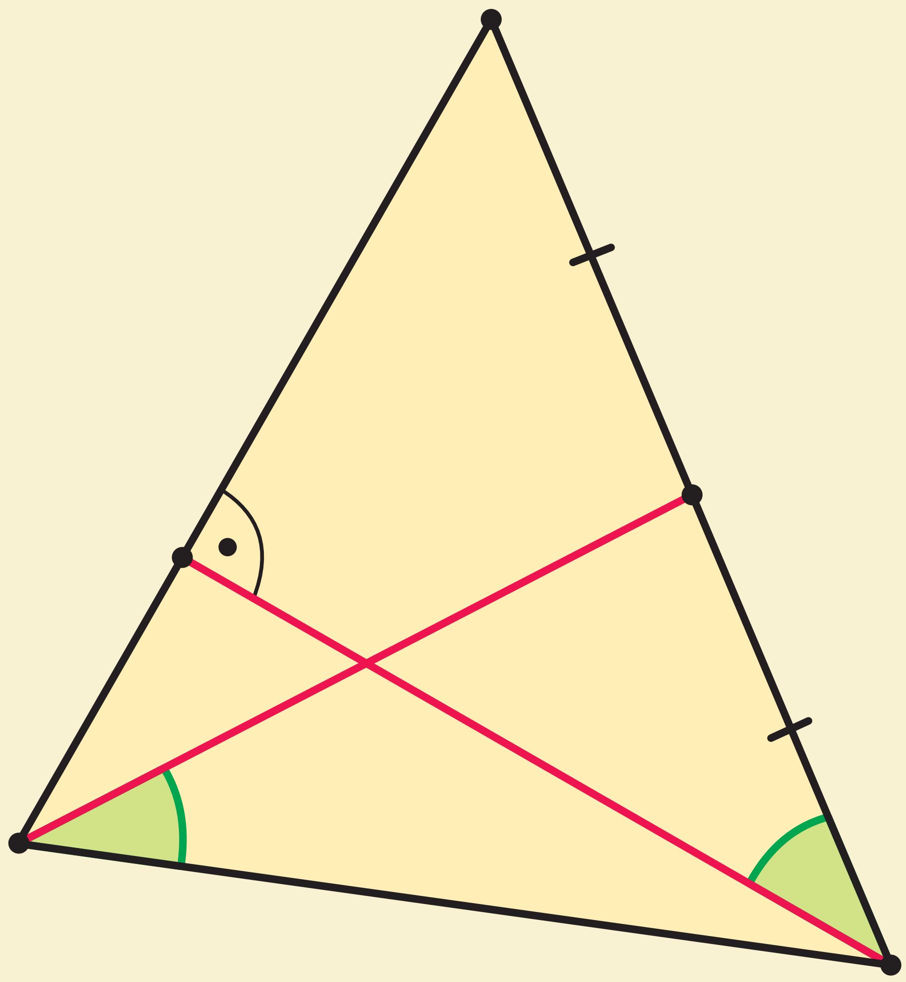
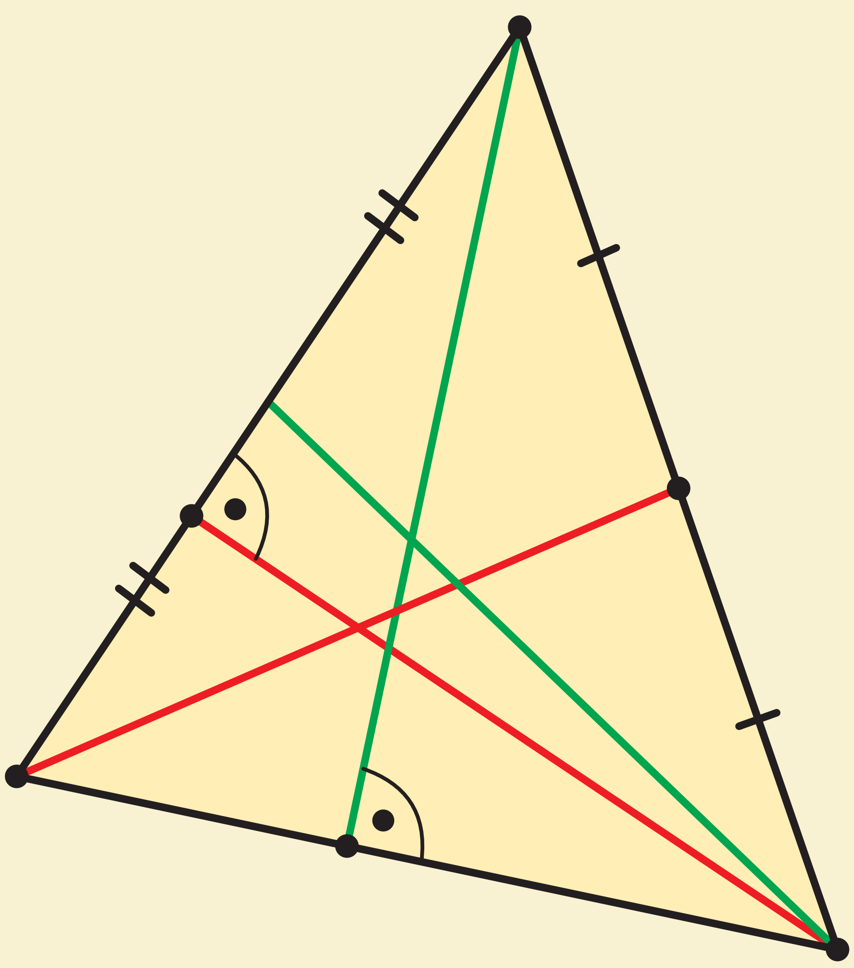
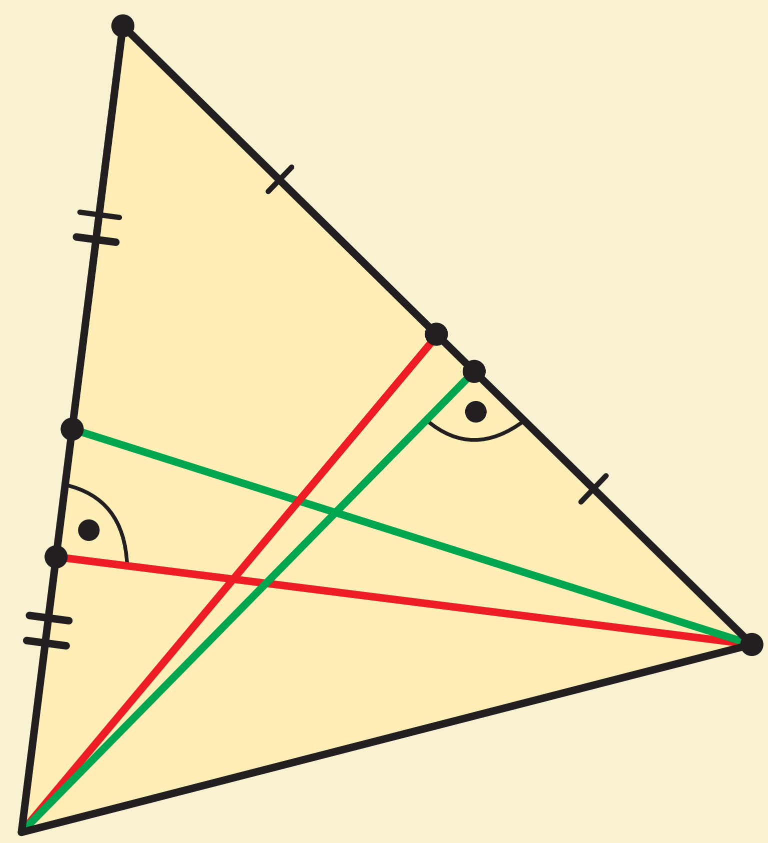
Jak rozpoznać trójkąt równoboczny?









STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

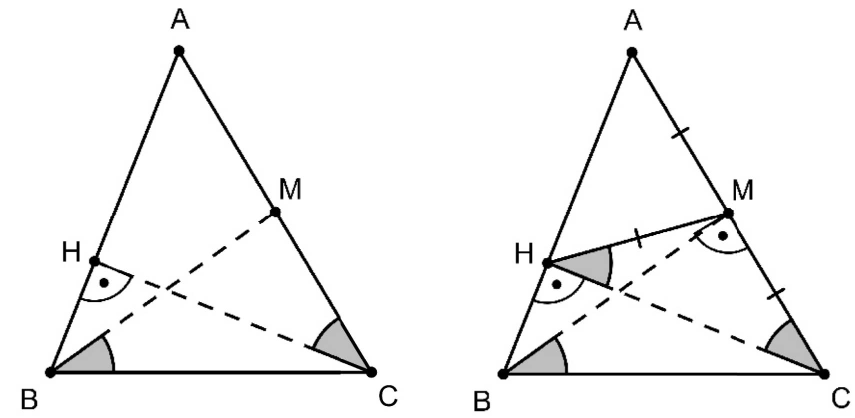
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Opracowanie i druk plakatu współfinansowane przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

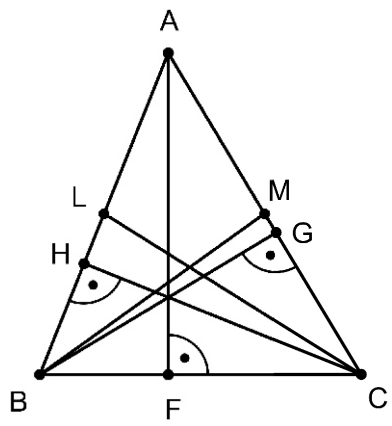
Co jest na plakacie?

Charles Leytem, Kamila Muraszkowska



Rysunek 3: Własność 1.

Trójkąty równoboczne to proste obiekty, które łatwo scharakteryzować. Można je jednak rozpoznawać na podstawie znacznie mniej intuicyjnych własności niż równość długości boków czy miar kątów. Plakat przedstawia kilka takich możliwości opierających się na wykorzystaniu pewnej wiedzy na temat środkowych i wysokości. Omówimy je teraz dokładniej.



Rysunek 1: Oznaczenia

Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, w którym przez AF, BG, CH oznaczymy wysokości, a przez BM i CL — dwie z jego środkowych (Rysunek 1).

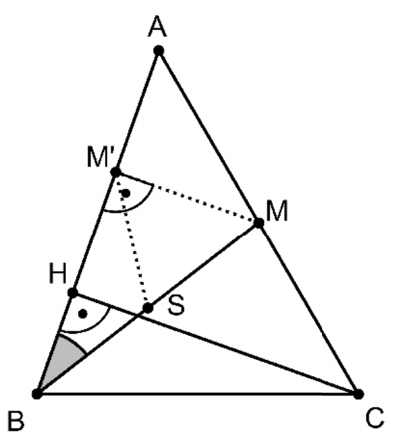
To, że trójkąt ABC jest równoboczny, można wywnioskować z każdej z następujących własności:

Własność 1. $CH = BM$ oraz $\sphericalangle CBM = \sphericalangle ACH$.

Własność 2. $CH = BM$ oraz $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BCH$.

Własność 3. $CH = BM$ oraz $CL = BG$.

Własność 4. $CH = BM$ oraz $CL = AF$.



Rysunek 2: Fakt.

Zaczniemy od wyprowadzenia pewnego pomocniczego faktu, prawdziwego dla dowolnego trójkąta, niekoniecznie ostrokątnego.

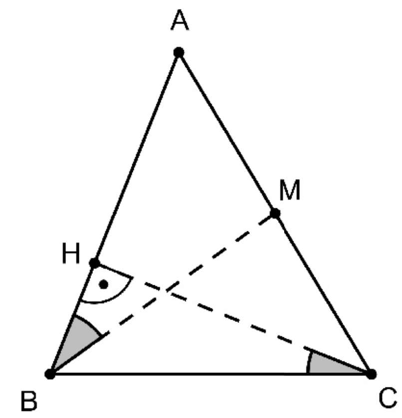
Fakt. $CH = BM$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ABM = 30°$.

Dowód. Niech M' będzie rzutem prostokątnym punktu M na prostą zawierającą odcinek AB, a S środkiem odcinka BM (Rysunek 2). Odcinki MM' i CH są równoległe, a więc z twierdzenia Talesa mamy $MM' = \frac{1}{2}CH$. Ponadto S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BMM', a zatem $SM = SM'$ oraz $\sphericalangle MSM' = 2 \cdot \sphericalangle ABM$. W efekcie $\sphericalangle ABM = 30°$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt SMM' jest równoboczny, równoważnie $MM' = SM$, czyli $BM = CH$. □

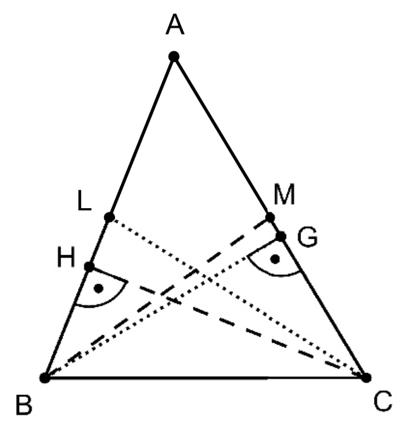
Przejdziemy teraz do omówienia powyższych własności.

Własność 1. Trójkąt AHC jest prostokątny, a więc okrąg na nim opisany ma średnicę AC i środek w punkcie M. Wynika stąd, że $HM = MC$, czyli $\sphericalangle CHM = \sphericalangle MCH = \sphericalangle CBM$ (Rysunek 3). Na czworokącie $BCMH$ można więc opisać okrąg, a zatem kąt BMC jest prosty jako oparty na tym samym łuku co kąt BHC. W rezultacie środkowa BM jest jednocześnie wysokością trójkąta ABC, a stąd wynika, że $AB = BC$. Korzystając z Faktu, uzyskujemy $\sphericalangle ABM = 30°$, skąd $\sphericalangle BAC = 60°$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

Własność 2. Na mocy Faktu $\sphericalangle BCH = \sphericalangle ABM = 30°$. Stąd $\sphericalangle ABC = 60°$, a więc środkowa BM jest jednocześnie dwusieczną kąta ABC. Zatem boki AB oraz BC są równej długości, co w połączeniu z równością $\sphericalangle ABC = 60°$ pokazuje, że trójkąt ABC jest równoboczny.



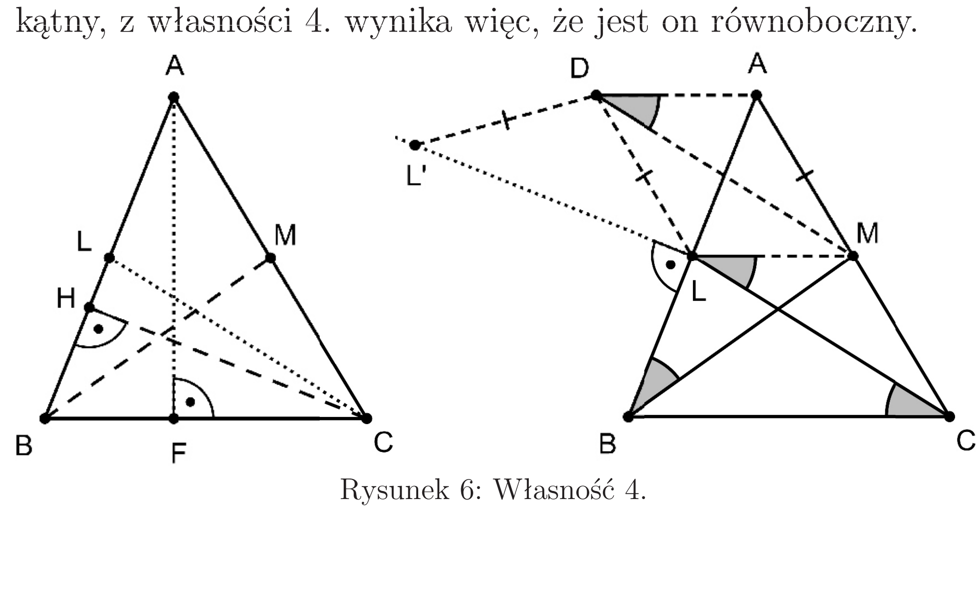
Rysunek 4: Własność 2.



Rysunek 5: Własność 3.

Własność 3. Na podstawie Faktu $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACL = 30°$. Trójkąty ABM i ACL są więc podobne, wobec czego $\frac{AM}{AL} = \frac{AB}{AC} = \frac{2AL}{2AM}$. W rezultacie $AM = AL$, czyli $AB = AC$. Stąd wynika w szczególności równość $BG = CH$. W połączeniu z założeniami otrzymujemy więc $CL = BG = CH = BM$, skąd wynika, że $BC = AB = AC$. Zauważmy, że nie korzystaliśmy tu z tego, że trójkąt jest ostrokątny.

Własność 4. Na mocy Faktu $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BCL = 30°$. Wybierzmy taki punkt D, aby czworokąt $ADLM$ był równoległobokiem. Wówczas czworokąt $CMDL$ również jest równoległobokiem. Wtedy $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BCL = \sphericalangle CLM = \sphericalangle MDA$, a zatem na czworokącie $ADBM$ można opisać okrąg. Załóżmy, że punkt S jest środkiem tego okręgu. Wtedy zachodzi $\sphericalangle ASM = 2 \cdot \sphericalangle ABM = 60°$, a zatem trójkąt ASM jest równoboczny. Promień okręgu opisanego na czworokącie $ADBM$ jest więc równy AM. Jego środek natomiast leży na symetralnej odcinka AB w odległości AM od punktu D. Istnieją dwa takie możliwe punkty, z których jednym jest L. W tym wypadku $AL = ML = AM$, a zatem $AB = BC = AC$. Załóżmy teraz, że środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ADBM$ jest L'. Z założenia $\sphericalangle DAL = \sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle ALD = \sphericalangle BAC$ są ostre. Ponieważ $DL' = AL'$ i $DL = DL'$, to $\sphericalangle ADL' = \sphericalangle DAL'$ oraz $\sphericalangle DL'L = \sphericalangle DLL'$. Kąty ADL' i $DL'L$ są więc ostre. Wynika stąd, że czworokąt $ADL'L$ ma trzy kąty ostre i jeden prosty, co jest niemożliwe. Przy założeniu, że trójkąt ABC jest ostrokątny, z własności 4. wynika więc, że jest on równoboczny.



Rysunek 6: Własność 4.