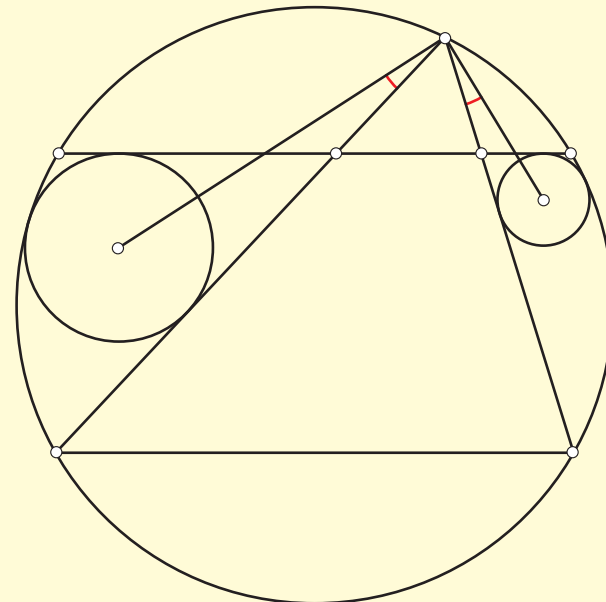
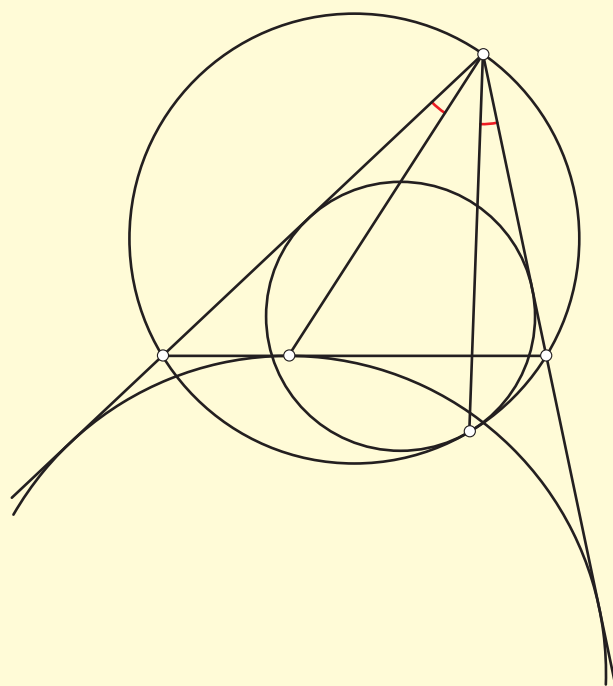
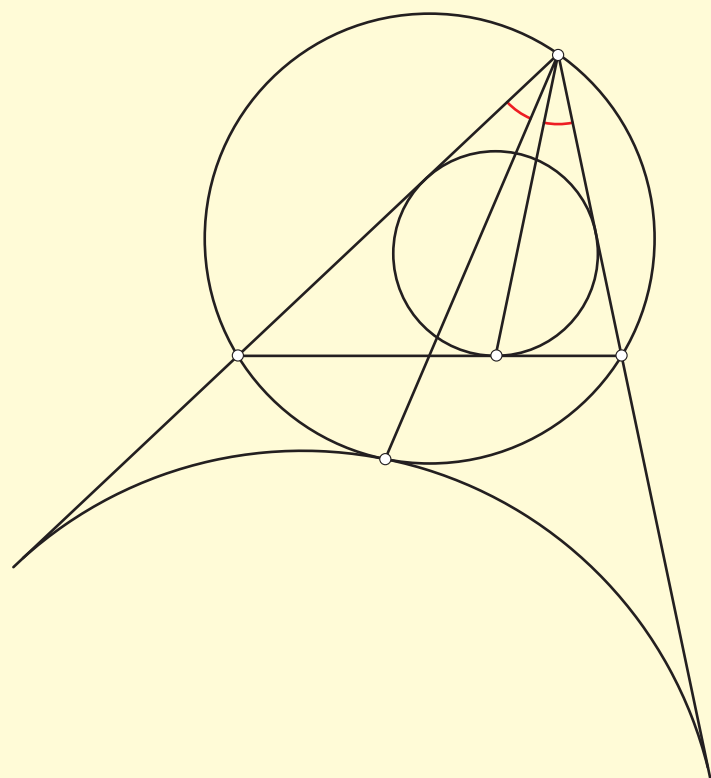
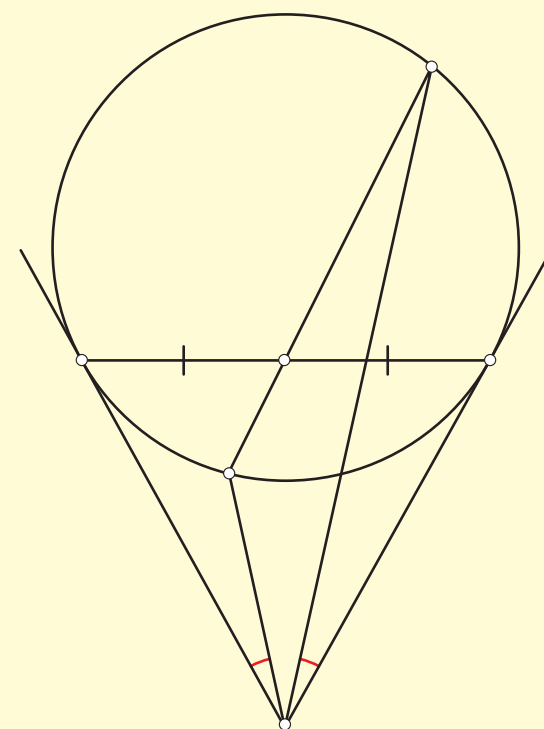
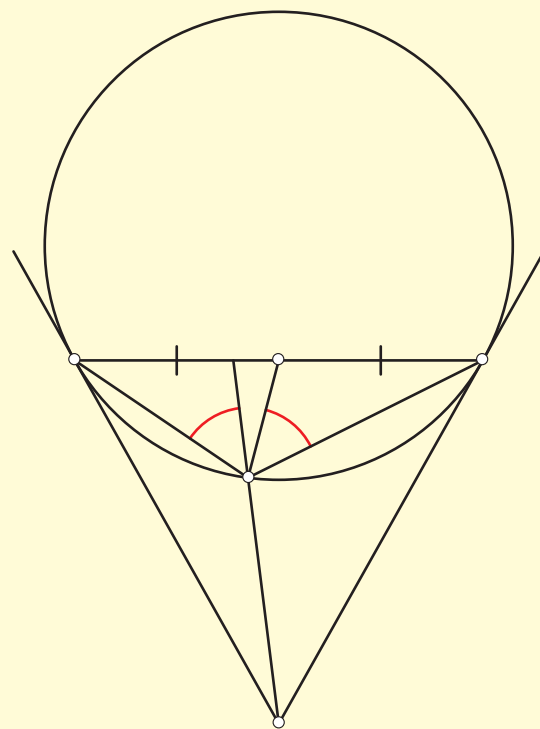
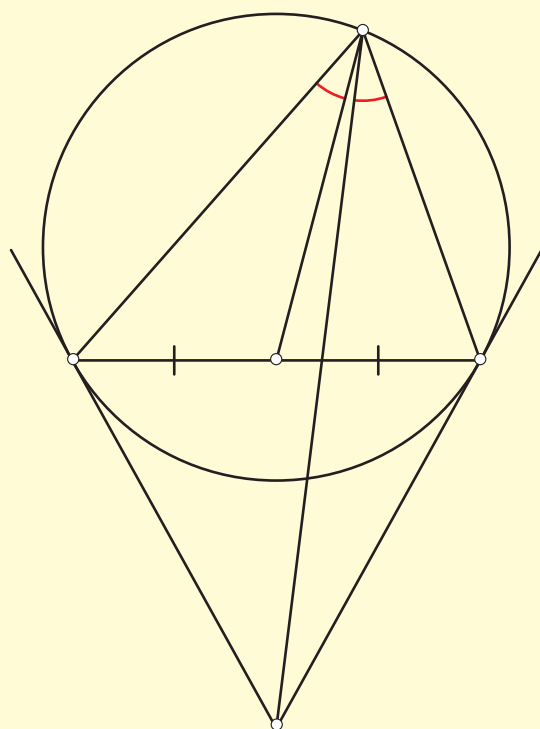
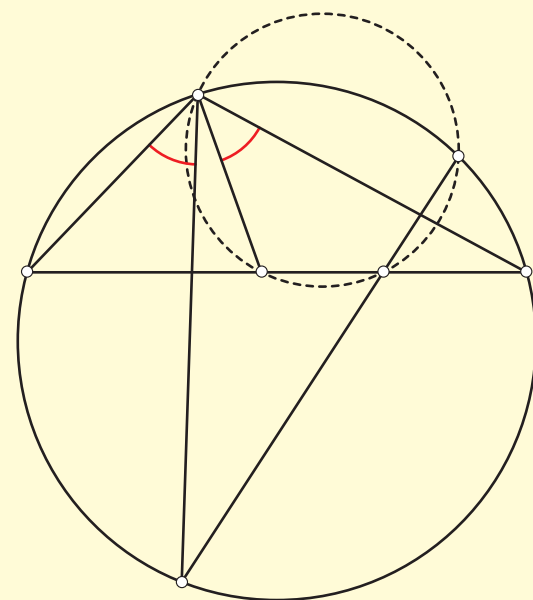
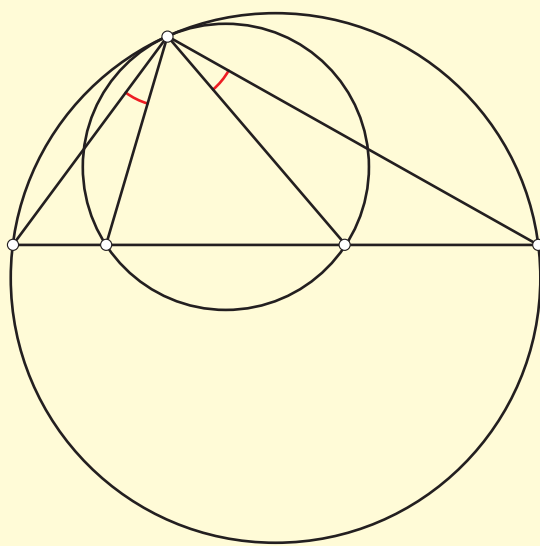
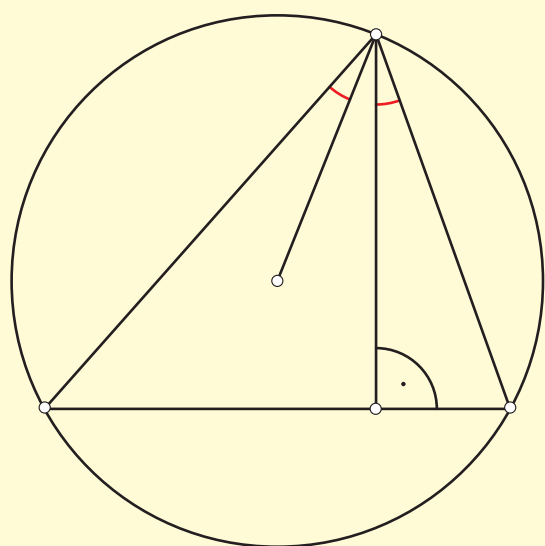


Równe kąty



STOWARZYSZENIE NA RZECZ
EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl



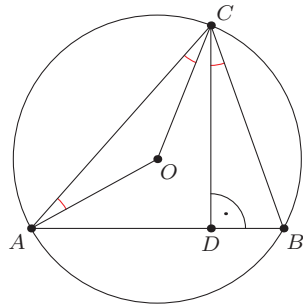
Równe kąty

Michał Kieza

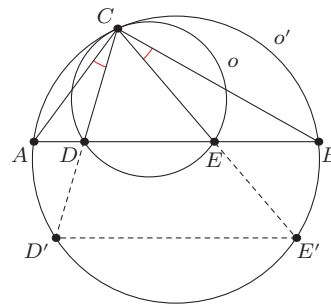
Przykład 1.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1 (przyjmujemy też założenie, że kąt ABC jest ostry; w przeciwnym razie podobna własność także jest prawdziwa, a dowód jest analogiczny). Wykorzystując twierdzenie o kącie wpisanym i kącie środkowym otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle BCD &= 90^\circ - \sphericalangle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACO - \sphericalangle CAO) = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle ACO) = \sphericalangle ACO. \end{aligned}$$



rys. 1



rys. 2

Przykład 2.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 2. Niech D' i E' będą odpowiednio punktami przecięcia prostych CD i CE z okręgiem o' . Ponieważ okręgi o i o' są styczne w punkcie C , to istnieje jednokładność o środku C przekształcająca pierwszy z tych okręgów na drugi. Ta sama jednokładność przekształca punkty D i E odpowiednio na punkty D' i E' , a więc $DE \parallel D'E'$. W takim razie trapez $ABE'D'$ wpisany w okrąg o' jest równoramienny. Zatem łuki AD' i BE' niezawierające punktu C są równe, a więc kąty wpisane ACD' i BCE' oparte na tych łukach mają równe miary.

Przykład 3.

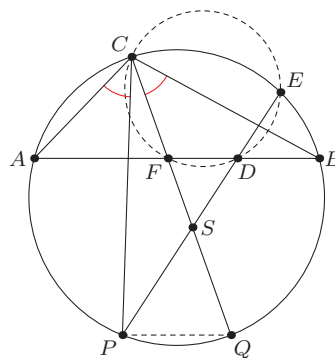
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Załóżmy, że prosta CF przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie Q , a prostą PD w punkcie S . Rozpatrując potęgi punktu S względem okręgu opisanego na trójkącie ABC i względem okręgu przechodzącego przez punkty C, D, E i F otrzymujemy

$$SP \cdot SE = SQ \cdot SC \quad \text{oraz} \quad SE \cdot SD = SC \cdot SF.$$

Dzieląc je stronami otrzymujemy

$$\frac{SP}{SD} = \frac{SQ}{SF},$$

co na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa oznacza, że proste PQ i DF , a więc także AB są równoległe. W takim razie trapez $ABQP$ wpisany w okrąg jest równoramienny. Zatem łuki AP i BQ niezawierające punktu C są równe, a więc kąty wpisane ACP i BCQ oparte na tych łukach mają równe miary.



rys. 3

Przykład 4.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4. Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą mamy

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle ACP,$$

skąd wniosek, że trójkąty ADP i CAP mające dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku P są podobne (kąt-kąt). Zatem

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AP}{PC}.$$

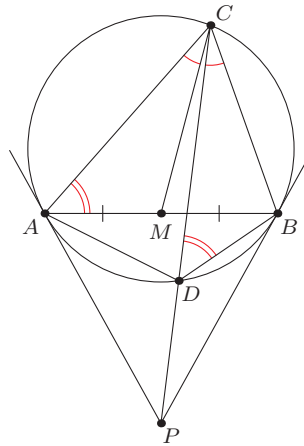
Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BP}{PC},$$

co po uwzględnieniu równości $AP = BP$ prowadzi do wniosku, że $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Stąd i z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ACBD$ otrzymujemy

$$2AM \cdot CD = AB \cdot CD = AD \cdot BC + BD \cdot AC = 2AC \cdot BD,$$

czyli $\frac{AM}{AC} = \frac{BD}{CD}$. Ponadto $\sphericalangle MAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, więc trójkąty MAC i BDC są podobne (bok-kąt-bok). Zatem $\sphericalangle ACM = \sphericalangle DCB$.



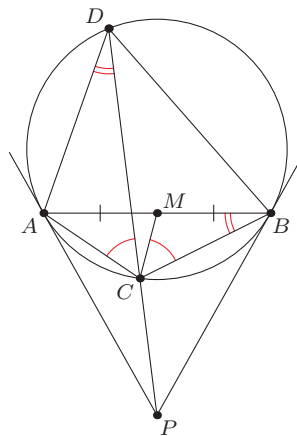
rys. 4

Przykład 5.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 5. Niech D będzie punktem przecięcia prostej PC z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Tak jak w przykładzie 4 dowodzimy, że $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Stąd i z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ACBD$ otrzymujemy

$$2BM \cdot CD = AB \cdot CD = AD \cdot BC + BD \cdot AC = 2AD \cdot BC,$$

więc $\frac{BM}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Ponadto $\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, a zatem trójkąty ADC i MBC są podobne (bok-kąt-bok). W takim razie $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCM$.



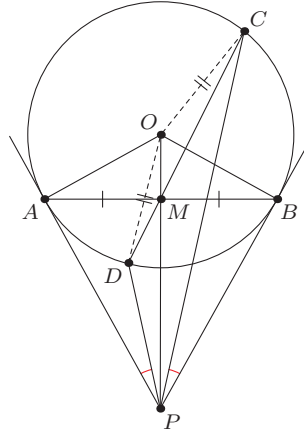
rys. 5

Przykład 6.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 6. Niech dodatkowo O będzie środkiem danego okręgu. Ponieważ na czworokątach $ACBD$ i $OAPB$ można opisać okręgi (bo $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OBP = 90^\circ$), to

$$MC \cdot MD = MA \cdot MB = MO \cdot MP,$$

skąd wniosek, że na czworokącie $OCPD$ także można opisać okrąg. Ponieważ $OC = OD$, więc łuki OC i OD tego okręgu niezawierające punktu P są równe, a zatem kąty wpisane OPC i OPD oparte na tych łukach mają równe miary. Stąd, wobec równości kątów APM i BPM dostajemy tezę.



rys. 6

Zanim przejdziemy do dalszych przykładów, zdefiniujemy przekształcenie zwane *inwersją*.

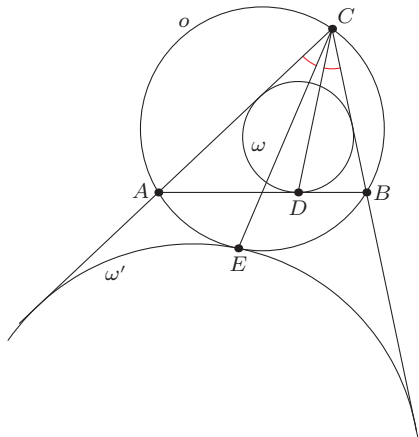
Definicja.

Inwersją względem okręgu o środku O i promieniu r (często mówimy inwersją o środku O i promieniu r) nazywamy takie przekształcenie, które każdemu punktowi $A \neq O$ przypisuje punkt A' leżący na półprostej OA^{\rightarrow} taki, że $OA \cdot OA' = r^2$. Z definicji natychmiast wynika, że inwersja jest *inwolucją*, czyli złożona sama z sobą daje identyczność. Ponadto prawdziwe są następujące własności inwersji, z których będziemy korzystać:

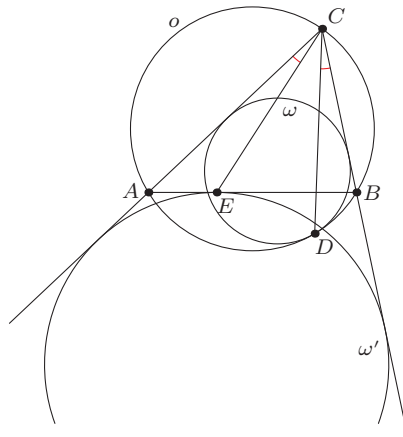
- prosta przechodząca przez punkt O przechodzi na siebie,
- dla dowolnego punktu A półprosta OA^{\rightarrow} przechodzi na siebie,
- okrąg przechodzący przez środek inwersji przechodzi na pewną prostą,
- prosta nieprzechodząca przez środek inwersji przechodzi na pewien okrąg przechodzący przez środek inwersji,
- okrąg nieprzechodzący przez środek inwersji przechodzi na pewien okrąg nieprzechodzący przez środek inwersji,
- inwersja zachowuje styczność prostych i okręgów,
- inwersja zachowuje kąty między krzywymi — kąt między krzywymi to kąt między prostymi stycznymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia.

Przykład 7.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 7. Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB . Przekształcenie to zamienia półproste CA^{\rightarrow} i CB^{\rightarrow} (i punkty A i B) oraz prostą AB z okręgiem o . W takim razie okrąg ω przejdzie na okrąg ω' (gdyż punkt styczności ω z odcinkiem CA przejdzie na punkt leżący na półprostej CB^{\rightarrow} poza odcinkiem CB). Skąd wniosek, że obrazem punktu D jest punkt E . Zatem półprosta CD^{\rightarrow} przejdzie na półprostą CE^{\rightarrow} , a skoro inwersja zachowuje kąty, to $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE$.



rys. 7



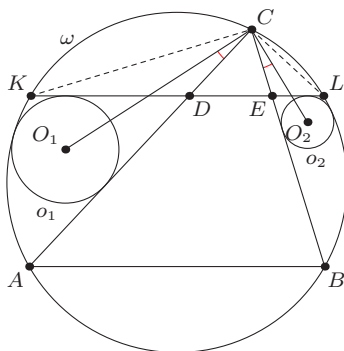
rys. 8

Przykład 8.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 8. Ponownie rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB . Przekształcenie to zamienia półproste CA^{\rightarrow} i CB^{\rightarrow} (i punkty A i B) oraz prostą AB z okręgiem o . W takim razie okrąg ω przejdzie na okrąg ω' (gdyż punkt styczności ω z odcinkiem CA przejdzie na punkt leżący na półprostej CB^{\rightarrow} poza odcinkiem CB). Stąd wniosek, że obrazem punktu D jest punkt E . Półprosta CD^{\rightarrow} przejdzie więc na półprostą CE^{\rightarrow} , a skoro inwersja zachowuje kąty, to $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE$.

Przykład 9.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 9. Niech ponadto O_1 i O_2 będą środkami odpowiednio okręgów o_1 i o_2 . Tym razem rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CK \cdot CL}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta KCL . Rozważane przekształcenie zamienia punkty K i L oraz prostą KL z okręgiem ω . Ponieważ proste KL i AB są równoległe, to $\sphericalangle ACK = \sphericalangle BCL$, więc dane przekształcenie zamienia też półproste CA^{\rightarrow} i CB^{\rightarrow} . Punkt A jest przecięciem półprostej CA^{\rightarrow} i okręgu ω , a więc jego obrazem musi być punkt przecięcia półprostej CB^{\rightarrow} i prostej KL , czyli punkt E . Analogicznie uzasadniamy, że obrazem punktu B jest punkt D . Ponadto łuk AK niezawierający punktu C przechodzi na odcinek EL (i na odwrót), zaś łuk BL niezawierający punktu C przechodzi na odcinek DK (i na odwrót). W takim razie rozważane przekształcenie zamienia też miejscami okręgi o_1 i o_2 . Ponadto prosta CO_1 jest prostopadłą do okręgu o_1 , a więc przejdzie na prostą przechodzącą przez punkt C i prostopadłą do okręgu o_2 , czyli prostą CO_2 . Skoro inwersja zachowuje kąty, to $\sphericalangle ACO_1 = \sphericalangle BCO_2$.



rys. 9