Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W zawodach I stopnia obecnej, LXIII Olimpiady Matematycznej wzięło udział 1409 uczniów, więc nieco mniej niż w poprzedniej. Jest to liczba bliska wieloletniej średniej. Do drugiego stopnia zakwalifikowano 622 uczniów. Zawody drugiego stopnia odbyły się 17 i 18 lutego.

Wszystkie zadania z odbytych już etapów obecnej Olimpiady (także z wielu poprzednich) i ich rozwiązania można znaleźć na stronie internetowej Olimpiady pod adresem `www.om.edu.pl`.

Najtrudniejszym zadaniem w pierwszym stopniu okazało się przedostatnie zadanie (stereometria), które w całym kraju rozwiązało jedynie 29 osób. Trudne też było dwunaste zadanie, ale z nim dały sobie radę 222 osoby. Najłatwiejsze w pierwszym stopniu było zadanie trzecie (geometria płaska), z którym poradziło sobie 1076 osób.

W zawodach drugiego stopnia najtrudniejsza okazała się geometria przestrzenna ku zaskoczeniu części członków komisji przygotowującej zadania na zawody. Rozwiązało je poprawnie około 80 osób, drugie w kolejności było zadanie piąte (geometria płaska), które rozwiązało nieco ponad 90 osób – dokładne liczby w czasie pisania tekstu jeszcze nie są znane. Najłatwiejszym zadaniem tego etapu było zadanie pierwsze (układ równań), które rozwiązało 216 osób, czyli około 36% uczestników II stopnia OM. Chce się powiedzieć tylko 216 osób, bo układ równań nie był standardowy z punktu widzenia tego, co pojawia się w liceach, ale też nie był trudny.

Autora tego tekstu zaskoczyła trudność zadania z geometrii przestrzennej:

Zadanie 2. *Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.*

Rzecz w tym, że zadanie można rozwiązać momentalnie, i to w pamięci, posługując się tzw. współrzędnymi barycentrycznymi, o których można coś przeczytać w artykule Marka Kordosa *Co nam mogą dać ciężary i wypory?* opublikowanym w *Delcie* 3/2012. Każdy punkt czworościanu traktujemy jako środek masy układu złożonego z czterech jego wierzchołków, w których umieszczono odpowiednie masy. Wybór tych mas jest jednoznaczny, jeśli ich sumą jest 1. Środek ciężkości S czworościanu $ABCD$ otrzymujemy, umieszczając w wierzchołkach równe masy: $S = \frac{A+B+C+D}{4}$. We wspomnianym artykule M.K. wyjaśnił, że chcąc potraktować punkt P trójkąta ABC jako środek masy układu trzech punktów materialnych, należy w wierzchołkach A, B, C umieścić masy równe polom trójkątów BCP, CAP, ABP. W przypadku punktu P czworościanu $ABCD$ zastępujemy pola trójkątów leżących naprzeciw wierzchołków objętościami przeciwległych czworościanów, np. w punkcie A umieszczamy masę równą objętości czworościanu $BCDP$. Środek I sfery wpisanej w czworościan otrzymujemy, umieszczając w wierzchołkach masy równe polom przeciwległych ścian, bo w tym przypadku wysokości czterech ostrosłupów są równe jako promienie sfery wpisanej. Przy okazji: środek okręgu wpisanego w trójkąt otrzymujemy, gdy masy są równe długościom przeciwległych boków – Czytelniku, przypomnij sobie twierdzenie o dwusiecznej! Wobec tego

$$I = \frac{p_A A + p_B B + p_C C + p_D D}{p_A + p_B + p_C + p_D},$$

gdzie p_A to pole trójkąta BCD, analogicznie definiujemy p_B, p_C, p_D.

Wektory

$$\overrightarrow{DS} = \frac{A+B+C+D}{4} - D = \frac{(A-D)+(B-D)+(C-D)}{4} \quad \text{oraz}$$

$$\overrightarrow{DI} = \frac{p_A A + p_B B + p_C C + p_D D}{p_A + p_B + p_C + p_D} - D = \frac{p_A(A-D) + p_B(B-D) + p_C(C-D)}{p_A + p_B + p_C + p_D}$$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy trójki współczynników

$$\left(\frac{p_A}{p_A+p_B+p_C+p_D}, \frac{p_B}{p_A+p_B+p_C+p_D}, \frac{p_C}{p_A+p_B+p_C+p_D}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

są proporcjonalne, a więc gdy $p_A = p_b = p_C$.

Michał KRYCH

Na marginesie ostatniego zadania drugiego stopnia OM:

Zadanie 6. *Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że*

$$S(2^n + n) < S(2^n).$$

chciałbym zapytać Czytelników *Delty* o prawdziwość stwierdzenia: dla nieskończenie wielu n zachodzi równość $S(2^n + n) = S(2^n)$. Jeśli tak, to czy ta równość zachodzi dla nieskończenie wielu n postaci $10^k - 1$?