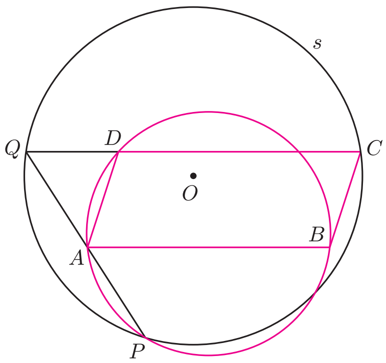
20 i 21 maja finaliści LXI Olimpiady Matematycznej zmagali się z ostatnimi sześcioma zadaniami tych zawodów. W sobotę, 24 maja zostały ogłoszone wyniki. Bezapelacyjnym zwycięzcą został Damian Orlef z Zabrza, który rozwiązał wszystkie zadania, uzyskując 36 punktów na 36 możliwych. Następni dwaj zawodnicy rozwiązali po cztery zadania bezbłędnie, a czterech następnych też po cztery, ale tracąc po jednym punkcie. Finał Olimpiady okazał się więc trudny.

Z zadaniami finału oraz szkicami ich rozwiązań można zapoznać się na stronie olimpiady pod adresem: www.om.edu.pl

Zwykle w trakcie zawodów lub w trakcie sprawdzania prac znajdowane są bardziej pomysłowe lub prostsze rozwiązania niektórych zadań niż te zaproponowane przez organizatorów. Tak było i tym razem. Niżej przedstawimy inne niż podane w szkicach rozwiązania dwóch zadań: dość trudnego – trzeciego i najtrudniejszego – szóstego. Z 12 osób, które rozwiązały zadanie trzecie, tylko pięć zrobiło to bezbłędnie, w pozostałych sześciu pracach nie rozważono wszystkich możliwych położeń różnych punktów, czyli przesadnie sugerowano się rysunkiem, który mógł wyglądać nieco inaczej, a w jednej powołano się na niestandardowe, prawdziwe twierdzenie, ale niewystępujące w znanych książkach.
Zadanie szóste rozwiązał jedynie zwycięzca.



Zadanie 3. *Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ. Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.*

Oto rozwiązanie bez rozważania przypadków, które podał Michał Kieza, upraszczając pracę Łukasza Rajkowskiego, za której redakcję autor otrzymał nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego.

Ponieważ $DC \parallel AB$, więc kąt QDA jest równy kątowi DAB, a ten kątowi DPB opartemu na tym samym łuku. Kąty QAD i PBD są równe, bo każdy z nich dopełnia kąt DAP do $180°$. Wobec tego trójkąty QAD i DBP są podobne. Stąd $\frac{DB}{QA} = \frac{PB}{DA} = \frac{PD}{QD} =: \lambda$. Z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do czworokąta $APBD$ wynika, że $AP \cdot BD + BP \cdot AD = DP \cdot AB$.
Stąd $AP \cdot \lambda QA + \lambda AD \cdot AD = \lambda QD \cdot AB$,
zatem $AP \cdot QA + AD \cdot AD = QD \cdot AB = QD \cdot CD$ (przeciwległe boki równoległoboku są równe). Niech R będzie promieniem okręgu s opisanego na trójkącie CPQ. Iloczyn $AP \cdot QA$ to potęga punktu A względem okręgu s, więc $AP \cdot QA = R^2 - AO^2$. Analogicznie $QD \cdot DC = R^2 - DO^2$, więc $R^2 - AO^2 + AD^2 = R^2 - DO^2$, zatem $AD^2 + DO^2 = AO^2$. Z twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że kąt ADO jest prosty, a to należało wykazać.

Zadanie 6. *Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki $a_{mn} = a_m a_n$ oraz $a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n)$ dla $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. Dowieść, że $a_n = n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Mamy $a_{2n} = a_2 a_n = 2a_n$. Stąd indukcyjnie otrzymujemy $a_{2^n} = 2^n$. Dalej $a_3^2 = a_9 \leqslant C(a_1 + a_8) = 9C$, więc $a_3 \leqslant 3\sqrt{C}$. Dla dowolnych m, n mamy

$$a_{m+n}^3 = a_{(m+n)^3} = a_{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3} \leqslant C(a_{m^3+3m^2n} + a_{3mn^2+n^3}) \leqslant C(C(a_{m^3} + a_{3m^2n}) + C(a_{3mn^2} + a_{n^3})) =$$
$$= C^2(a_m^3 + a_3 a_m^2 a_n + a_3 a_m a_n^2 + a_n^3) \leqslant C^2(a_m^3 + 3\sqrt{C} a_m^2 a_n + 3\sqrt{C} a_m a_n^2 + a_n^3) < C^{5/2}(a_m^3 + 3a_m^2 a_n + 3a_m a_n^2 + a_n^3) =$$

$= C^{5/2}(a_m + a_n)^3$ — ostatnia nierówność wynika z tego, że $C > 1$. Wykazaliśmy, że jeśli dla wszystkich par liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n)$, to zachodzi też nierówność $a_{m+n} \leqslant C^{5/6}(a_m + a_n)$.
Proste rozumowanie indukcyjne prowadzi do wniosku, że dla wszystkich trójek liczb naturalnych k, m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leqslant C^{(5/6)^k}(a_m + a_n)$.
Wobec tego $a_{m+n} \leqslant \lim_{k\to\infty} C^{(5/6)^k}(a_m + a_n) = C^0(a_m + a_n) = a_m + a_n$.
Stąd $a_{n+1} \leqslant a_n + a_1 = a_n + 1$, więc $a_n \leqslant n$ dla każdego n. Zatem $2^n = a_{2^n} \leqslant a_n + a_{2^n-n} \leqslant n + (2^n - n) = 2^n$, a więc $a_n + a_{2^n-n} = 2^n$ dla każdego n. Ponieważ mamy $a_n \leqslant n$ dla każdego n, a więc także $a_{2^n-n} \leqslant 2^n - n$, wynika stąd, że $a_n = n$.

Użyliśmy też pojęcia granicy ciągu nieobecnego w programach szkolnych, które w rozwiązaniu firmowym **jawnie** używane nie było.

W rozwiązaniu tym nieco prościej niż w firmowym zmniejszana była stała C.