Silnie i podzielność

Wzór Legendre'a

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Dla dowolnej liczby naturalnej n niech $w_p(n)$ oznacza wykładnik potęgi liczby p w rozwinięciu liczby n na czynniki pierwsze. Inaczej mówiąc:

$$w_p(n) = k \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad p^k \mid n \quad \text{oraz} \quad p^{k+1} \nmid n.$$

Wówczas mamy:

$$w_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

Zauważmy, że suma w powyższym wzorze ma skończenie wiele składników. Mianowicie, jeśli $p^r \leq n < p^{r+1}$, to

$$w_p(n!) = \sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor.$$

Zadania

1. Oczywiste jest to, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$ jest całkowita. Mianowicie $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!} = \dbinom{m+n}{m}$. W szczególności liczba $\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ jest całkowita. Można udowodnić więcej. Wykaż, że liczba $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}$ jest całkowita.

2. Liczby postaci $D_n = \dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+2)!}$ na ogół nie są całkowite. Mianowicie:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$	6	$\frac{33}{2}$	$\frac{143}{3}$	143	442	$\frac{4199}{3}$

Mianowniki sugerują, że liczba $6D_n = 6\cdot\dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+2)!}$ jest całkowita. Wykaż, że rzeczywiście tak jest.

3. Liczby postaci $E_n = \dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+3)!}$ na ogół nie są całkowite. Mianowicie:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{143}{30}$	13	$\frac{221}{6}$	$\frac{323}{3}$

Mianowniki sugerują, że liczba $60E_n = 60\cdot\dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+3)!}$ jest całkowita. Wykaż, że rzeczywiście tak jest.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Liczby postaci $\dfrac{(2n+k)!}{n!\cdot(n+k)!} = \dbinom{2n+k}{n}$ oczywiście są całkowite. Liczby postaci $\dfrac{(2n+k)!}{(n+1)!\cdot(n+k)!}$ na ogół nie są całkowite. Wykaż, że nie istnieje liczba całkowita C taka, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{C\cdot(2n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}$ jest całkowita.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}$ jest całkowita.

6. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4\cdot\dfrac{(2n+5)!}{(n+1)!\cdot(n+5)!}$ jest całkowita.

7. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{(12n)!\cdot n!}{(6n)!\cdot(4n)!\cdot(3n)!}$ jest całkowita.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{(6n)!\cdot(2n)!}{(4n)!\cdot(3n)!\cdot n!}$ jest całkowita.

9. (XIV MOM, zadanie 3)
Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}$ jest całkowita.

Uwaga. Można udowodnić, że

$$\frac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!} = \sum_k (-1)^k \binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n-k}.$$

10. (Olimpiada Matematyczna USA, 1975 r.)
Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba

$$\frac{(5m)!\cdot(5n)!}{m!\cdot n!\cdot(3m+n)!\cdot(m+3n)!}$$

jest całkowita.

11. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n\cdot n!}$ jest całkowita.

12. (XLIII OM, zadanie 6 w zawodach III stopnia)
Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $(k!)^{k^2+k+1}$ jest dzielnikiem liczby $(k^3)!$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Rozwiązania zadań

1. Oczywiste jest to, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$ jest całkowita. Mianowicie $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!} = \dbinom{m+n}{m}$. W szczególności liczba $\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ jest całkowita. Można udowodnić więcej. Wykaż, że liczba $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Udowodnię najpierw za pomocą wzoru Legendre'a, że liczba $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$ jest całkowita. W tym celu pokażę, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p(m!) + w_p(n!) \leq w_p\big((m+n)!\big).$$

Mamy zatem pokazać, że

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \leq \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{m+n}{p^k}\right\rfloor = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{m}{p^k}+\frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

Do tego wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{m}{p^k}+\frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

Jest to szczególny przypadek nierówności

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor,$$

która jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y. To kończy dowód.

Wykażę teraz, że liczba $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}$ jest całkowita. Tym razem mamy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p(n!) + w_p\big((n+1)!\big) \leq w_p\big((2n)!\big),$$

czyli

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \leq \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

Do tego znów wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

W tym celu udowodnię lemat, z którego dalej kilkakrotnie skorzystamy.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Lemat. Jeśli $0 \leq r < n$ oraz $0 \leq 2k \leq n$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{n} \right\rfloor.$$

Dowód. Ponieważ $0 \leq r < n$, więc

$$\left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor = 0.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{n} \right\rfloor.$$

Jeśli $r + k < n$, to oczywiście

$$\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor = 0 \leq \left\lfloor \frac{2r}{n} \right\rfloor.$$

Przypuśćmy zatem, że $r + k \geq n$. Wówczas

$$r + k < n + \frac{n}{2} < 2n \quad \text{oraz} \quad 2r \geq 2n - 2k = n + (n - 2k) \geq n.$$

Zatem

$$\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor = 1 \leq \left\lfloor \frac{2r}{n} \right\rfloor.$$

To kończy dowód lematu.

Powróćmy do rozwiązania naszego zadania. Niech teraz $k \geq 1$ i podzielmy z resztą liczbę n przez p^k:

$$n = q \cdot p^k + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < p^k.$$

Wówczas

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot p^k + r}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{p^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot p^k + r + 1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2q \cdot p^k + 2r}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor 2q + \frac{2r}{p^k} \right\rfloor = 2q + \left\lfloor \frac{2r}{p^k} \right\rfloor.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$q + \left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor + q + \left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor \leq 2q + \left\lfloor \frac{2r}{p^k} \right\rfloor,$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli

$$\left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{p^k} \right\rfloor.$$

Ta nierówność wynika natychmiast z lematu, gdyż

$$0 \leq r < p^k \quad \text{oraz} \quad 2 \cdot 1 = 2 \leq 2^k \leq p^k.$$

To kończy rozwiązanie zadania. Na zakończenie zauważmy jeszcze, że znana jest interpretacja kombinatoryczna liczb Catalana C_n. Zdefiniujmy następujący zbiór X. Będzie to zbiór ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ długości $2n$ o następujących własnościach:

- $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \{0, 1\}$,
- w ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ występuje dokładnie n jedynek i n zer, czyli

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n,$$

- dla każdej liczby całkowitej k takiej, że $1 \leq k \leq 2n$ liczba jedynek w ciągu $(x_1, \ldots, x_k)$ jest niewiększa od liczby zer w tym ciągu. Inaczej mówiąc:

$$x_1 + \ldots + x_k \leq k - (x_1 + \ldots + x_k),$$

  czyli

$$2(x_1 + \ldots + x_k) \leq k.$$

Wówczas

$$C_n = |X| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

2. Liczby postaci $D_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot (n+2)!}$ na ogół nie są całkowite. Mianowicie:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$	6	$\frac{33}{2}$	$\frac{143}{3}$	143	442	$\frac{4199}{3}$

Mianowniki sugerują, że liczba $6D_n = 6 \cdot \dfrac{(2n)!}{n! \cdot (n+2)!}$ jest całkowita. Wykaż, że rzeczywiście tak jest.

Rozwiązanie. Wykażę, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p(n!) + w_p\big((n+2)!\big) \leq w_p\big(6 \cdot (2n)!\big).$$

Niech najpierw $p \geq 5$. Wówczas $p \nmid 6$, więc wystarczy pokazać, że

$$w_p(n!) + w_p\big((n+2)!\big) \leq w_p\big((2n)!\big),$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+2}{p^k}\right\rfloor\leq\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

Do tego znów wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k\geq 1$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{p^k}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

Tak jak w poprzednim zadaniu, dzielimy z resztą liczbę n przez p^k:

$$n=q\cdot p^k+r\quad\text{oraz}\quad 0\leq r<p^k.$$

Wówczas

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{q\cdot p^k+r}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor q+\frac{r}{p^k}\right\rfloor=q+\left\lfloor\frac{r}{p^k}\right\rfloor,$$

$$\left\lfloor\frac{n+2}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{q\cdot p^k+r+2}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor q+\frac{r+2}{p^k}\right\rfloor=q+\left\lfloor\frac{r+2}{p^k}\right\rfloor,$$

$$\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2q\cdot p^k+2r}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor 2q+\frac{2r}{p^k}\right\rfloor=2q+\left\lfloor\frac{2r}{p^k}\right\rfloor.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$q+\left\lfloor\frac{r}{p^k}\right\rfloor+q+\left\lfloor\frac{r+2}{p^k}\right\rfloor\leq 2q+\left\lfloor\frac{2r}{p^k}\right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor\frac{r}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{r+2}{p^k}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{2r}{p^k}\right\rfloor.$$

Ta nierówność wynika natychmiast z lematu, gdyż

$$0\leq r<p^k\quad\text{oraz}\quad 2\cdot 2=4<5\leq 5^k\leq p^k.$$

Niech teraz $p=3$. Mamy pokazać, że

$$w_3(n!)+w_3\big((n+2)!\big)\leq w_3\big(6\cdot(2n)!\big)=w_3(6)+w_3\big((2n)!\big)=1+w_3\big((2n)!\big),$$

czyli

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{3^k}\right\rfloor+\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+2}{3^k}\right\rfloor\leq 1+\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{2n}{3^k}\right\rfloor.$$

Wykażę najpierw, że dla $k\geq 2$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor\frac{n}{3^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{3^k}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{2n}{3^k}\right\rfloor.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Tak jak wyżej, dzielimy z resztą liczbę n przez 3^k:

$$n = q \cdot 3^k + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < 3^k.$$

Wówczas

$$\left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 3^k + r}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{3^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{3^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 3^k + r + 2}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+2}{3^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+2}{3^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2q \cdot 3^k + 2r}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor 2q + \frac{2r}{3^k} \right\rfloor = 2q + \left\lfloor \frac{2r}{3^k} \right\rfloor.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$q + \left\lfloor \frac{r}{3^k} \right\rfloor + q + \left\lfloor \frac{r+2}{3^k} \right\rfloor \leq 2q + \left\lfloor \frac{2r}{3^k} \right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor \frac{r}{3^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+2}{3^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{3^k} \right\rfloor.$$

Ta nierówność wynika natychmiast z lematu, gdyż

$$0 \leq r < 3^k \quad \text{oraz} \quad 2 \cdot 2 = 4 < 9 = 3^2 \leq 3^k.$$

Pozostaje do wykazania nierówność

$$\left\lfloor \frac{n}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{3^1} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2n}{3^1} \right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Dzielimy z resztą liczbę n przez 3:

$$n = q \cdot 3 + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < 3.$$

Wówczas

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 3 + r}{3} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{3} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 3 + r + 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+2}{3} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2q \cdot 3 + 2r}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2q + \frac{2r}{3} \right\rfloor = 2q + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Mamy zatem pokazać, że

$$q + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + q + \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor \leq 1 + 2q + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor.$$

Mamy trzy przypadki.

- $r = 0$. Wówczas dowodzona nierówność ma postać

$$\left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor,$$

  czyli $0 + 0 \leq 1 + 0$.
- $r = 1$. Wówczas dowodzona nierówność ma postać

$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor,$$

  czyli $0 + 1 \leq 1 + 0$.
- $r = 2$. Wówczas dowodzona nierówność ma postać

$$\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor,$$

  czyli $0 + 1 \leq 1 + 1$.

We wszystkich przypadkach dowodzona nierówność okazała się prawdziwa. Wreszcie niech $p = 2$. Mamy pokazać, że

$$w_2(n!) + w_2\big((n+2)!\big) \leq w_2\big(6 \cdot (2n)!\big) = w_2(6) + w_2\big((2n)!\big) = 1 + w_2\big((2n)!\big),$$

czyli

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor + \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n+2}{2^k} \right\rfloor \leq 1 + \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor.$$

Wykażę najpierw, że dla $k \geq 2$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor.$$

Tak jak wyżej, dzielimy z resztą liczbę n przez 2^k:

$$n = q \cdot 2^k + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < 2^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Wówczas

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 2^k + r}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{2^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{2^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 2^k + r + 2}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+2}{2^k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+2}{2^k} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2q \cdot 2^k + 2r}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor 2q + \frac{2r}{2^k} \right\rfloor = 2q + \left\lfloor \frac{2r}{2^k} \right\rfloor.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$q + \left\lfloor \frac{r}{2^k} \right\rfloor + q + \left\lfloor \frac{r+2}{2^k} \right\rfloor \leq 2q + \left\lfloor \frac{2r}{2^k} \right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor \frac{r}{2^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+2}{2^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{2^k} \right\rfloor.$$

Ta nierówność wynika natychmiast z lematu, gdyż

$$0 \leq r < 2^k \quad \text{oraz} \quad 2 \cdot 2 = 4 = 2^2 \leq 2^k.$$

Pozostaje do wykazania nierówność

$$\left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^1} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2n}{2^1} \right\rfloor,$$

czyli

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor.$$

Dzielimy z resztą liczbę n przez 2:

$$n = q \cdot 2 + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < 2.$$

Wówczas

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 2 + r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{2} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q \cdot 2 + r + 2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+2}{2} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+2}{2} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2q \cdot 2 + 2r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 2q + \frac{2r}{2} \right\rfloor = 2q + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + q + \left\lfloor \frac{r+2}{2} \right\rfloor \leq 1 + 2q + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor,$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+2}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor = 1 + r.$$

Mamy trzy przypadki.

- $r = 0$. Wówczas dowodzona nierówność ma postać

$$\left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor \leq 1 + 0,$$

  czyli $0 + 1 \leq 1 + 0$.
- $r = 1$. Wówczas dowodzona nierówność ma postać

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \leq 1 + 1,$$

  czyli $0 + 1 \leq 1 + 1$.

W obu przypadkach dowodzona nierówność okazała się prawdziwa. To kończy rozwiązanie zadania. Na zakończenie zauważmy jeszcze, że ma miejsce równość

$$6D_n = \frac{6 \cdot (2n)!}{n! \cdot (n+2)!} = 4C_n - C_{n+1} = 3\binom{2n}{n} - 4\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n+2},$$

z której natychmiast wynika, że liczba $6D_n$ jest całkowita.

3. Liczby postaci $E_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot (n+3)!}$ na ogół nie są całkowite. Mianowicie:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{143}{30}$	13	$\frac{221}{6}$	$\frac{323}{3}$

Mianowniki sugerują, że liczba $60E_n = 60 \cdot \dfrac{(2n)!}{n! \cdot (n+3)!}$ jest całkowita. Wykaż, że rzeczywiście tak jest.

Rozwiązanie. W tym rozwiązaniu powtarzamy główne pomysły z zadania poprzedniego. Dlatego pokażę tylko najważniejsze kroki rozwiązania. Korzystając z lematu udowodnionego w rozwiązaniu pierwszego zadania, dowodzimy, że jeśli p jest liczbą pierwszą, k jest liczbą całkowitą taką, że $p^k \geq 6$ oraz $0 \leq r < p^k$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{p^k} \right\rfloor.$$

Te założenia spełnione są w następujących przypadkach:

- $p \geq 7$,
- $p = 5$ oraz $k \geq 2$,

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

- $p = 3$ oraz $k \geq 2$,
- $p = 2$ oraz $k \geq 3$.

Ponadto dowodzimy czterech nierówności obejmujących pozostałe przypadki.

- **Przypadek 1.** Jeśli $p = 5$ oraz $0 \leq r < 5$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{5} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{5} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że $0 \leq r \leq 4$, czyli $r + 3 \leq 7$. Stąd wynika, że

$$\left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{5} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor \leq 0 + 1 = 1 \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{5} \right\rfloor.$$

- **Przypadek 2.** Jeśli $p = 3$ oraz $0 \leq r < 3$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{3} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że $0 \leq r \leq 2$, czyli $r + 3 \leq 5$. Stąd wynika, że

$$\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor \leq 0 + 1 = 1 \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor.$$

- **Przypadek 3.** Jeśli $p = 2$, $k = 1$ oraz $0 \leq r < 2$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} + 1 \right\rfloor \leq 1 + r,$$
$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor \leq r,$$
$$\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor \leq r.$$

Jeśli $r = 0$, to otrzymujemy nierówność prawdziwą

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \leq 0.$$

Jeśli zaś $r = 1$, to otrzymujemy następującą nierówność, także prawdziwą:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor \leq 1.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

- **Przypadek 4.** Jeśli $p = 2$, $k = 2$ oraz $0 \leq r < 4$, to

$$\left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{4} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{4} \right\rfloor.$$

Ponieważ $r \leq 3$, więc $r + 3 \leq 6$. Mamy wówczas nierówność prawdziwą

$$\left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+3}{4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor \leq 0 + 1 = 1 \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r}{4} \right\rfloor.$$

To kończy rozwiązanie zadania. Na zakończenie odnotujmy następującą tożsamość, której sprawdzenie pozostawię jako ćwiczenie:

$$60E_n = 10\binom{2n}{n} - 15\binom{2n}{n+1} + 6\binom{2n}{n+2} - \binom{2n}{n+3}.$$

Oczywiście z tej równości wynika, że liczba $60E_n$ jest całkowita.

4. Liczby postaci $\dfrac{(2n+k)!}{n! \cdot (n+k)!} = \dbinom{2n+k}{n}$ oczywiście są całkowite. Liczby postaci $\dfrac{(2n+k)!}{(n+1)! \cdot (n+k)!}$ na ogół nie są całkowite. Wykaż, że nie istnieje liczba całkowita C taka, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{C \cdot (2n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że taka liczba C istnieje. Wybierzmy liczbę pierwszą $p > C$ oraz przyjmijmy $n = p - 1$. Wówczas $n + 1 = p$ oraz $2n + 1 = 2p - 1$. Ponieważ liczba

$$\frac{C \cdot (2n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{C \cdot (2p-1)!}{p! \cdot p!}$$

jest całkowita, więc

$$w_p(p!) + w_p(p!) \leq w_p(C) + w_p\big((2p-1)!\big).$$

Oczywiście

$$w_p(p!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{p}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{p} \right\rfloor = 1$$

oraz

$$w_p\big((2p-1)!\big) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2p-1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p-1}{p} \right\rfloor = 1$$

(gdyż dla $k \geq 2$ mamy $p^k \geq p^2 > 2p - 1$). Zatem

$$w_p(p!) + w_p(p!) = 1 + 1 = 2 \leq w_p(C) + w_p\big((2p-1)!\big) = w_p(C) + 1,$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli $w_p(C) \geq 1$. To zaś oznacza, że $p \mid C$, co jednak jest sprzeczne z wyborem liczby p. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!} = C_{n+1}$$

i teza wynika z zadania 1.

6. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4 \cdot \dfrac{(2n+5)!}{(n+1)! \cdot (n+5)!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Znów pokażę tylko najważniejsze kroki rozwiązania. Najpierw wykażę, że jeśli p jest liczbą pierwszą, k jest liczbą całkowitą taką, że $p^k \geq 5$ oraz $0 \leq r < p^k$, to

$$\left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r+5}{p^k} \right\rfloor.$$

Jeśli bowiem $r+5 < p^k$, to tym bardziej $r+1 < p^k$ i otrzymujemy nierówność

$$\left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{p^k} \right\rfloor = 0 + 0 = 0 \leq \left\lfloor \frac{2r+5}{p^k} \right\rfloor.$$

Jeśli natomiast $r+1 < p^k \leq r+5$, to $r < p^k - 1$, czyli

$$r + 5 < p^k + 4 < p^k + 5 \leq p^k + p^k = 2p^k.$$

Zatem $r + 5 \leq 2p^k - 1$, skąd wynika, że

$$\left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{p^k} \right\rfloor \leq 0 + \left\lfloor \frac{2p^k-1}{p^k} \right\rfloor = 0 + 1 = 1 \leq \left\lfloor \frac{r+5}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r+5}{p^k} \right\rfloor.$$

Wreszcie, jeśli $r+1 \geq p^k$, to $r = p^k - 1$ (gdyż $r < p^k$). Wówczas

$$\left\lfloor \frac{r+1}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^k}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^k+4}{p^k} \right\rfloor = 1 + 1 + \left\lfloor \frac{4}{p^k} \right\rfloor = 2 + 0 = 2 \leq 2 + \left\lfloor \frac{3}{p^k} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor \frac{2p^k+3}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(p^k-1)+5}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2r+5}{p^k} \right\rfloor.$$

Przyjęte wyżej założenia są spełnione w następujących przypadkach:

- $p \geq 5$,
- $p = 3$ oraz $k \geq 2$,

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

- $p = 2$ oraz $k \geq 3$.

W pozostałych przypadkach musimy udowodnić następujące nierówności:

- jeśli $p = 3$ oraz $k = 1$, to

$$\left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r+5}{3} \right\rfloor,$$

- jeśli $p = 2$ oraz $k = 1$ to,

$$\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r+5}{2} \right\rfloor,$$

- jeśli $p = 2$ oraz $k = 2$, to

$$\left\lfloor \frac{r+1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+5}{4} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{2r+5}{4} \right\rfloor.$$

Sprawdzenie tych trzech nierówności pozostawię jako ćwiczenie. Na tym zakończę wskazówki do rozwiązania tego zadania. Dodam tylko, że liczby, o których mowa w tym zadaniu, mają także interesującą interpretację kombinatoryczną. Przypuśćmy, że mamy wybory, w których bierze udział dwóch kandydatów. Jeden z nich wygrywa z przewagą k głosów: on dostaje $n + k$ głosów, jego konkurent n głosów. Teraz zastanawiamy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że w czasie liczenia głosów (kartki wyborcze są oglądane po jednej) zwycięzca będzie przez cały czas liczenia głosów prowadził (dokładniej: przez cały czas będzie miał co najmniej tyle głosów co jego konkurent). Okazuje się, że liczba ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+k})$, w których jest $n + k$ jedynek i n zer oraz takich, że dla każdego początkowego odcinka $(x_1, \ldots, x_l)$ liczba jedynek w tym odcinku jest co najmniej równa liczbie zer, jest równa

$$B_n = \frac{k-1}{n+1}\binom{2n+k}{n} = \binom{2n+k}{n+1} - \binom{2n+k}{n}.$$

Oczywiście liczby B_n są całkowite. Liczba, o którą chodziło w zadaniu, została wybrana dla $k = 5$. Te liczby są po angielsku nazywane „ballot numbers” i pod tą nazwą można znaleźć wiele informacji o nich.

7. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{(12n)! \cdot n!}{(6n)! \cdot (4n)! \cdot (3n)!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Wykażę, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p\big((6n)!\big) + w_p\big((4n)!\big) + w_p\big((3n)!\big) \leq w_p\big((12n)!\big) + w_p(n!).$$

Ze wzoru Legendre'a wynika, że wystarczy udowodnić nierówność

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{6n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{4n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{3n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{12n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Do tego wystarczy udowodnić, że dla każdej liczby $k \geq 1$ ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor \frac{6n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{12n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Udowodnię w tym celu więcej. Mianowicie pokażę, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x ma miejsce nierówność

$$\lfloor 6x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leq \lfloor 12x \rfloor + \lfloor x \rfloor .$$

Niech zatem $\lfloor x \rfloor = m$, czyli $x = m + r$, gdzie $0 \leq r < 1$. Mamy zatem pokazać, że

$$\lfloor 6m + 6r \rfloor + \lfloor 4m + 4r \rfloor + \lfloor 3m + 3r \rfloor \leq \lfloor 12m + 12r \rfloor + \lfloor m + r \rfloor .$$

Przekształćmy tę nierówność:

$$\begin{gathered}
\lfloor 6m + 6r \rfloor + \lfloor 4m + 4r \rfloor + \lfloor 3m + 3r \rfloor \leq \lfloor 12m + 12r \rfloor + \lfloor m + r \rfloor , \\
6m + \lfloor 6r \rfloor + 4m + \lfloor 4r \rfloor + 3m + \lfloor 3r \rfloor \leq 12m + \lfloor 12r \rfloor + m + \lfloor r \rfloor , \\
13m + \lfloor 6r \rfloor + \lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor \leq 13m + \lfloor 12r \rfloor + \lfloor r \rfloor , \\
\lfloor 6r \rfloor + \lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor \leq \lfloor 12r \rfloor + \lfloor r \rfloor .
\end{gathered}$$

Mamy zatem udowodnić, że jeśli $0 \leq r < 1$, to

$$\lfloor 6r \rfloor + \lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor \leq \lfloor 12r \rfloor + \lfloor r \rfloor ,$$

czyli

$$\lfloor 6r \rfloor + \lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor \leq \lfloor 12r \rfloor .$$

Niech zatem

$$r = \frac{k}{12} + s,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $0 \leq k < 12$ oraz $0 \leq s < \frac{1}{12}$. Wówczas:

- $6r = \dfrac{k}{2} + 6s$, czyli
$$\frac{k}{2} \leq 6r < \frac{k}{2} + \frac{1}{2}.$$
Stąd łatwo wynika, że
$$\lfloor 6r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor .$$

- $4r = \dfrac{k}{3} + 4s$, czyli
$$\frac{k}{3} \leq 4r < \frac{k}{3} + \frac{1}{3}.$$
Stąd łatwo wynika, że
$$\lfloor 4r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor .$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

- $3r = \frac{k}{4} + 3s$, czyli
$$\frac{k}{4} \leq 3r < \frac{k}{4} + \frac{1}{4}.$$
Stąd łatwo wynika, że
$$\lfloor 3r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor.$$
- $12r = k + 12s$, czyli
$$k \leq 12r < k + 1.$$
Stąd łatwo wynika, że
$$\lfloor 12r \rfloor = k.$$

Mamy zatem pokazać, że jeśli k jest liczbą całkowitą oraz $0 \leq k \leq 11$, to
$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \leq k.$$

W tym celu zauważmy, że
$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13k}{12} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{k}{12} \right\rfloor \leq k + \left\lfloor \frac{11}{12} \right\rfloor = k.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\frac{(6n)! \cdot (2n)!}{(4n)! \cdot (3n)! \cdot n!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Powtórzę rozumowanie z poprzedniego zadania. Wykażę, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność
$$w_p\big((4n)!\big) + w_p\big((3n)!\big) + w_p(n!) \leq w_p\big((6n)!\big) + w_p\big((2n)!\big).$$

Ze wzoru Legendre'a wynika, że wystarczy udowodnić nierówność
$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{4n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{3n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{6n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor.$$

Do tego wystarczy udowodnić, że dla każdej liczby $k \geq 1$ ma miejsce nierówność
$$\left\lfloor \frac{4n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{6n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor.$$

Udowodnię w tym celu więcej. Mianowicie pokażę, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x ma miejsce nierówność
$$\lfloor 4x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor x \rfloor \leq \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Niech zatem $\lfloor x \rfloor = m$, czyli $x = m + r$, gdzie $0 \leq r < 1$. Mamy pokazać, że

$$\lfloor 4m + 4r \rfloor + \lfloor 3m + 3r \rfloor + \lfloor m + r \rfloor \leq \lfloor 6m + 6r \rfloor + \lfloor 2m + 2r \rfloor .$$

Przekształćmy tę nierówność:

$$\begin{gathered}
\lfloor 4m + 4r \rfloor + \lfloor 3m + 3r \rfloor + \lfloor m + r \rfloor \leq \lfloor 6m + 6r \rfloor + \lfloor 2m + 2r \rfloor , \\
4m + \lfloor 4r \rfloor + 3m + \lfloor 3r \rfloor + m + \lfloor r \rfloor \leq 6m + \lfloor 6r \rfloor + 2m + \lfloor 2r \rfloor , \\
8m + \lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor + \lfloor r \rfloor \leq 8m + \lfloor 6r \rfloor + \lfloor 2r \rfloor , \\
\lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor + \lfloor r \rfloor \leq \lfloor 6r \rfloor + \lfloor 2r \rfloor .
\end{gathered}$$

Mamy zatem udowodnić, że jeśli $0 \leq r < 1$, to

$$\lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor + \lfloor r \rfloor \leq \lfloor 6r \rfloor + \lfloor 2r \rfloor ,$$

czyli

$$\lfloor 4r \rfloor + \lfloor 3r \rfloor \leq \lfloor 6r \rfloor + \lfloor 2r \rfloor .$$

Jeszcze raz przyjmijmy

$$r = \frac{k}{12} + s,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $0 \leq k < 12$ oraz $0 \leq s < \frac{1}{12}$. Wówczas

$$\lfloor 6r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor , \quad \lfloor 4r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \quad \text{oraz} \quad \lfloor 3r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor .$$

Ponadto w taki sam sposób pokazujemy, że

$$\lfloor 2r \rfloor = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor .$$

Mamy zatem pokazać, że jeśli k jest liczbą całkowitą oraz $0 \leq k \leq 11$, to

$$\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor .$$

W tym celu sporządźmy następującą tabelkę:

k	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{6} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{6} \rfloor$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	1
4	1	1	2	0	2	2
5	1	1	2	0	2	2
6	1	2	3	1	3	4
7	1	2	3	1	3	4
8	2	2	4	1	4	5
9	2	3	5	1	4	5
10	2	3	5	1	5	6
11	2	3	5	1	5	6

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

We wszystkich przypadkach okazało się, że dowodzona nierówność jest prawdziwa. To kończy rozwiązanie zadania.

9. (XIV MOM, zadanie 3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}$ jest całkowita.

Uwaga. Można udowodnić, że

$$\frac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}=\sum_k(-1)^k\binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n-k}.$$

Rozwiązanie. Wykażę, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p(m!)+w_p(n!)+w_p\big((m+n)!\big)\le w_p\big((2m)!\big)+w_p\big((2n)!\big),$$

czyli

$$\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor+\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{m+n}{p^k}\right\rfloor\le\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{2m}{p^k}\right\rfloor+\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

Do tego wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+n}{p^k}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2m}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor.$$

Ta nierówność jest szczególnym przypadkiem nierówności

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor\le\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$$

prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y. Udowodnię teraz tę nierówność. Niech

$$\lfloor x\rfloor=k\quad\text{oraz}\quad\lfloor y\rfloor=l.$$

Zatem

$$x=k+s\quad\text{oraz}\quad y=l+t,$$

gdzie $0\le s,t<1$. Przekształcamy teraz dowodzoną nierówność:

$$\begin{gathered}\lfloor k+s\rfloor+\lfloor l+t\rfloor+\lfloor k+l+s+t\rfloor\le\lfloor 2k+2s\rfloor+\lfloor 2l+2t\rfloor,\\ k+\lfloor s\rfloor+l+\lfloor t\rfloor+k+l+\lfloor s+t\rfloor\le 2k+\lfloor 2s\rfloor+2l+\lfloor 2t\rfloor,\\ 2k+2l+\lfloor s\rfloor+\lfloor t\rfloor+\lfloor s+t\rfloor\le 2k+2l+\lfloor 2s\rfloor+\lfloor 2t\rfloor,\\ \lfloor s\rfloor+\lfloor t\rfloor+\lfloor s+t\rfloor\le\lfloor 2s\rfloor+\lfloor 2t\rfloor,\\ \lfloor s+t\rfloor\le\lfloor 2s\rfloor+\lfloor 2t\rfloor.\end{gathered}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Mamy zatem pokazać, że jeśli $0 \leq s < 1$ oraz $0 \leq t < 1$, to

$$\lfloor s+t \rfloor \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor .$$

Zauważmy najpierw, że $s + t < 2$. Stąd wynika, że $\lfloor s+t \rfloor \leq 1$. Mamy teraz dwa przypadki.

- $\lfloor s+t \rfloor = 0$. Wówczas oczywiście

$$\lfloor s+t \rfloor = 0 \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor .$$

- $\lfloor s+t \rfloor = 1$. Wówczas $s + t \geq 1$, skąd wynika, że

$$s \geq \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad t \geq \frac{1}{2},$$

czyli

$$2s \geq 1 \quad \text{lub} \quad 2t \geq 1.$$

Zatem

$$\lfloor 2s \rfloor \geq 1 \quad \text{lub} \quad \lfloor 2t \rfloor \geq 1.$$

W obu przypadkach mamy

$$\lfloor s+t \rfloor = 1 \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor .$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Dowód tożsamości wspomnianej w uwadze pokażę w dodatku do następnego wykładu o tożsamościach kombinatorycznych.

10. (Olimpiada Matematyczna USA, 1975 r.)
Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba

$$\frac{(5m)! \cdot (5n)!}{m! \cdot n! \cdot (3m+n)! \cdot (m+3n)!}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie. Wykażę, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$w_p(m!) + w_p(n!) + w_p\big((3m+n)!\big) + w_p\big((m+3n)!\big) \leq w_p\big((5m)!\big) + w_p\big((5n)!\big),$$

czyli

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{3m+n}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{m+3n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{5m}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{5n}{p^k} \right\rfloor .$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Do tego wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k ma miejsce nierówność

$$\left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3m+n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+3n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{5m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5n}{p^k} \right\rfloor .$$

Ta nierówność jest szczególnym przypadkiem nierówności

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor 3x+y \rfloor + \lfloor x+3y \rfloor \leq \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 5y \rfloor$$

prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y. Udowodnię teraz tę nierówność. Niech

$$\lfloor x \rfloor = k \quad \text{oraz} \quad \lfloor y \rfloor = l.$$

Zatem

$$x = k+s \quad \text{oraz} \quad y = l+t,$$

gdzie $0 \leq s, t < 1$. Przekształcamy teraz dowodzoną nierówność:

$$\begin{gathered}
\lfloor k+s \rfloor + \lfloor l+t \rfloor + \lfloor 3k+l+3s+t \rfloor + \lfloor k+3l+s+3t \rfloor \leq \lfloor 5k+5s \rfloor + \lfloor 5l+5t \rfloor , \\
k + \lfloor s \rfloor + l + \lfloor t \rfloor + 3k + l + \lfloor 3s+t \rfloor + k + 3l + \lfloor s+3t \rfloor \leq 5k + \lfloor 5s \rfloor + 5l + \lfloor 5t \rfloor , \\
5k + 5l + \lfloor s \rfloor + \lfloor t \rfloor + \lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq 5k + 5l + \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor , \\
\lfloor s \rfloor + \lfloor t \rfloor + \lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor , \\
\lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .
\end{gathered}$$

Mamy zatem pokazać, że jeśli $0 \leq s < 1$ oraz $0 \leq t < 1$, to

$$\lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $s \leq t$. Przypuśćmy teraz, że $s \geq \frac{3}{5}$. Wówczas mamy $3 \leq 5s \leq 5t$, czyli

$$\lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor \geq 3 + 3 = 6.$$

Z drugiej strony

$$3s + t < 3 + 1 = 4 \quad \text{oraz} \quad s + 3t < 1 + 3 = 4.$$

Zatem

$$\lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq 3 + 3 = 6 \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

Przypuśćmy następnie, że $t \leq 2s$. Wówczas

$$3s + t \leq 3s + 2s = 5s \quad \text{oraz} \quad s + 3t \leq t + 3t = 4t \leq 5t.$$

Zatem

$$\lfloor 3s+t \rfloor + \lfloor s+3t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym $s < \frac{3}{5}$ oraz $t > 2s$. Niech teraz

$$s = \frac{k}{5} + u \quad \text{oraz} \quad t = \frac{l}{5} + w,$$

gdzie $0 \leq k \leq 4$, $0 \leq l \leq 4$, $0 \leq u < \frac{1}{5}$ oraz $0 \leq w < \frac{1}{5}$. Zauważmy następnie, że z założenia $s < \frac{3}{5}$ wynika, iż $k \leq 2$. Mamy zatem następujące trzy przypadki.

- **Przypadek 1.** $k = 0$. Zatem $s = u$. Teraz mamy 5 możliwości.
  - ⋆ $l = 0$. Wówczas $t = w$. Zatem

    $$3s + t = 3u + w < \frac{4}{5} \quad \text{oraz} \quad s + 3t = u + 3w < \frac{4}{5}.$$

    Stąd wynika, że

    $$\lfloor 3s + t \rfloor + \lfloor s + 3t \rfloor = 0 + 0 = 0 \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

  - ⋆ $l = 1$. Wówczas $t = \frac{1}{5} + w$, czyli $5t = 1 + 5w$. Zatem

    $$3s + t = \frac{1}{5} + 3u + w < \frac{5}{5} = 1 \quad \text{oraz} \quad s + 3t = \frac{3}{5} + u + 3w < \frac{7}{5} < 2.$$

    Stąd wynika, że

    $$\lfloor 3s + t \rfloor + \lfloor s + 3t \rfloor \leq 0 + 1 = 1 = \lfloor 5t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

  - ⋆ $l = 2$. Wówczas $t = \frac{2}{5} + w$, czyli $5t = 2 + 5w$. Zatem

    $$3s + t = \frac{2}{5} + 3u + w < \frac{6}{5} < 2 \quad \text{oraz} \quad s + 3t = \frac{6}{5} + u + 3w < \frac{10}{5} = 2.$$

    Stąd wynika, że

    $$\lfloor 3s + t \rfloor + \lfloor s + 3t \rfloor \leq 1 + 1 = 2 = \lfloor 5t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

  - ⋆ $l = 3$. Wówczas $t = \frac{3}{5} + w$, czyli $5t = 3 + 5w$. Zatem

    $$3s + t = \frac{3}{5} + 3u + w < \frac{7}{5} < 2 \quad \text{oraz} \quad s + 3t = \frac{9}{5} + u + 3w < \frac{13}{5} < 3.$$

    Stąd wynika, że

    $$\lfloor 3s + t \rfloor + \lfloor s + 3t \rfloor = 1 + 2 = 3 = \lfloor 5t \rfloor \leq \lfloor 5s \rfloor + \lfloor 5t \rfloor .$$

  - ⋆ $l = 4$. Wówczas $t = \frac{4}{5} + w$, czyli $5t = 4 + 5w$. Zatem

    $$3s + t = \frac{4}{5} + 3u + w < \frac{8}{5} < 2 \quad \text{oraz} \quad s + 3t = \frac{12}{5} + u + 3w < \frac{16}{5} < 4.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Stąd wynika, że

$$\lfloor 3s+t\rfloor + \lfloor s+3t\rfloor = 1+3 = 4 = \lfloor 5t\rfloor \leq \lfloor 5s\rfloor + \lfloor 5t\rfloor .$$

- **Przypadek 2.** $k=1$. Zatem $s=\frac{1}{5}+u$, czyli $s\geq\frac{1}{5}$. Z założenia $t>2s$ wynika, że $t\geq\frac{2}{5}$, czyli $l\geq 2$. Teraz mamy 3 możliwości. We wszystkich mamy $5s=1+5u$.
  - ⋆ $l=2$. Wówczas $t=\frac{2}{5}+w$, czyli $5t=2+5w$. Zatem

$$3s+t=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+3u+w<\frac{9}{5}<2 \quad \text{oraz} \quad s+3t=\frac{1}{5}+\frac{6}{5}+u+3w<\frac{11}{5}<3.$$

Stąd wynika, że

$$\lfloor 3s+t\rfloor + \lfloor s+3t\rfloor \leq 1+2 = 3 = \lfloor 5s\rfloor + \lfloor 5t\rfloor .$$

  - ⋆ $l=3$. Wówczas $t=\frac{3}{5}+w$, czyli $5t=3+5w$. Zatem

$$3s+t=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+3u+w<\frac{10}{5}=2 \quad \text{oraz} \quad s+3t=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}+u+3w<\frac{14}{5}<3.$$

Stąd wynika, że

$$\lfloor 3s+t\rfloor + \lfloor s+3t\rfloor = 1+2 = 3 \leq \lfloor 5s\rfloor + \lfloor 5t\rfloor .$$

  - ⋆ $l=4$. Wówczas $t=\frac{4}{5}+w$, czyli $5t=4+5w$. Zatem

$$3s+t=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+3u+w<\frac{11}{5}<3 \quad \text{oraz} \quad s+3t=\frac{1}{5}+\frac{12}{5}+u+3w<\frac{17}{5}<4.$$

Stąd wynika, że

$$\lfloor 3s+t\rfloor + \lfloor s+3t\rfloor = 2+3 = 5 \leq \lfloor 5s\rfloor + \lfloor 5t\rfloor .$$

- **Przypadek 3.** $k=2$. Zatem $s=\frac{2}{5}+u$, czyli $s\geq\frac{2}{5}$. Z założenia $t>2s$ wynika, że $t\geq\frac{4}{5}$, czyli $l\geq 4$. Teraz mamy tylko jedną możliwość: $l=4$. Mamy wówczas także $5s=2+5u$.
  - ⋆ $l=4$. Wówczas $t=\frac{4}{5}+w$, czyli $5t=4+5w$. Zatem

$$3s+t=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+3u+w<\frac{14}{5}<3 \quad \text{oraz} \quad s+3t=\frac{2}{5}+\frac{12}{5}+u+3w<\frac{18}{5}<4.$$

Stąd wynika, że

$$\lfloor 3s+t\rfloor + \lfloor s+3t\rfloor \leq 2+3 = 5 \leq \lfloor 5s\rfloor + \lfloor 5t\rfloor .$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

We wszystkich przypadkach dowodzona nierówność okazała się prawdziwa. To kończy rozwiązanie zadania.

11. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n \cdot n!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Wykażę, że dla dowolnej liczby pierwszej p ma miejsce nierówność

$$n \cdot w_p(m!) + w_p(n!) \leq w_p\big((mn)!\big),$$

czyli

$$n \cdot \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

Spróbujemy zatem wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$ ma miejsce nierówność

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

Okazuje się jednak, że tak być nie musi. Popatrzmy na przykład dla $p = 2$, $m = 20$ oraz $n = 15$. Mamy wówczas

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{8} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{16} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{32} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{64} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{128} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{300}{256} \right\rfloor, \\
150 & + & 75 & + & 37 & + & 18 & + & 9 & + & 4 & + & 2 & + & 1, \\
\left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{20}{16} \right\rfloor, & & & & & & & & \\
10 & + & 5 & + & 2 & + & 1, & & & & & & & & \\
150 & + & 75 & + & 30 & + & 15, & & & & & & & & \\
 & & & & \left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor & + & \left\lfloor \frac{15}{8} \right\rfloor. & & & & & & \\
 & & & & 7 & + & 3 & + & 1. & & & & & &
\end{array}$$

Zauważamy, że

$$15 \cdot \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor = 150 = \left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor$$

oraz

$$15 \cdot \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 75 = \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor.$$

Ponadto

$$15 \cdot \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor = 37 = \left\lfloor \frac{300}{8} \right\rfloor.$$

Dzieje się tak dlatego, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem m. Zatem rozważymy dwa przypadki.

Przypadek 1. Liczba pierwsza p nie jest dzielnikiem m. Wtedy udowodnimy, że

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Podzielmy z resztą obie liczby m i n przez p^k:

$$m = p^k \cdot q + r \quad \text{oraz} \quad n = p^k \cdot s + t,$$

przy czym $1 \leq r < p^k$ oraz $0 \leq t < p^k$. Wówczas

$$mn = p^{2k} \cdot qs + p^k \cdot (qt + rs) + rt.$$

Zatem

$$\left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^{2k} \cdot qs + p^k \cdot (qt + rs) + rt}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor p^k \cdot qs + qt + rs + \frac{rt}{p^k} \right\rfloor =$$
$$= p^k \cdot qs + qt + rs + \left\lfloor \frac{rt}{p^k} \right\rfloor \geq p^k \cdot qs + qt + rs.$$

Z drugiej strony:

$$\left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor = q \quad \text{oraz} \quad \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = s.$$

Zatem

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = nq + s.$$

Chcemy zatem pokazać, że

$$nq + s \leq p^k \cdot qs + qt + rs.$$

Przekształćmy tę nierówność w sposób równoważny:

$$(p^k \cdot s + t) \cdot q + s \leq p^k \cdot qs + qt + rs,$$
$$p^k \cdot qs + qt + s \leq p^k \cdot qs + qt + rs,$$
$$s \leq rs.$$

Nierówność $s \leq rs$ jest oczywiście prawdziwa, gdyż $r \geq 1$. To kończy dowód nierówności w pierwszym przypadku.

Przypadek 2. Liczba pierwsza p jest dzielnikiem m. Niech $m = p^l \cdot d$, przy czym p nie jest dzielnikiem d. Najpierw udowodnimy, że jeśli $1 \leq k \leq l$, to

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

Mianowicie

$$\frac{m}{p^k} = \frac{p^l \cdot d}{p^k} = p^{l-k} \cdot d \quad \text{oraz} \quad \frac{mn}{p^k} = \frac{p^l \cdot d \cdot n}{p^k} = p^{l-k} \cdot d \cdot n$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

i stąd

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor = n \cdot p^{l-k} \cdot d = \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

Następnie udowodnimy, że jeśli $k \geq l+1$, to

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{k-l}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{mn}{p^k} \right\rfloor.$$

Inaczej mówiąc: jeśli $k \geq 1$, to

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m}{p^{l+k}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{mn}{p^{l+k}} \right\rfloor.$$

Przekształćmy tę nierówność:

$$n \cdot \left\lfloor \frac{p^l \cdot d}{p^{l+k}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{p^l \cdot dn}{p^{l+k}} \right\rfloor,$$

$$n \cdot \left\lfloor \frac{d}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{dn}{p^k} \right\rfloor.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa: to wynika z przypadku 1, gdyż liczba pierwsza p nie jest dzielnikiem d. Udowodnione nierówności kończą rozwiązanie zadania.

12. (XLIII OM, zadanie 6 w zawodach III stopnia)
Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $(k!)^{k^2+k+1}$ jest dzielnikiem liczby $(k^3)!$.

Rozwiązanie. Skorzystamy dwukrotnie z poprzedniego zadania. Przyjmijmy najpierw $m = n = k$. Wówczas stwierdzamy, że liczba

$$\frac{(k^2)!}{(k!)^{k+1}} = \frac{(k \cdot k)!}{(k!)^k \cdot k!}$$

jest całkowita. Następnie przyjmijmy $m = k^2$ oraz $n = k$. Wówczas z poprzedniego zadania wynika, że liczba

$$\frac{(k^3)!}{\big((k^2)!\big)^k \cdot k!} = \frac{(k^2 \cdot k)!}{\big((k^2)!\big)^k \cdot k!}$$

jest całkowita. Stąd wynika, że liczba

$$\left(\frac{(k^2)!}{(k!)^{k+1}}\right)^k \cdot \frac{(k^3)!}{\big((k^2)!\big)^k \cdot k!} = \frac{\big((k^2)!\big)^k}{(k!)^{k^2+k}} \cdot \frac{(k^3)!}{\big((k^2)!\big)^k \cdot k!} = \frac{(k^3)!}{(k!)^{k^2+k} \cdot k!} = \frac{(k^3)!}{(k!)^{k^2+k+1}}$$

jest całkowita. To kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Dodatek

Czebyszew w dowodzie jednego ze swoich twierdzeń wykorzystał następujący fakt:

dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$u_n = \frac{(30n)! \cdot n!}{(15n)! \cdot (10n)! \cdot (6n)!}$$

jest całkowita.

W związku z tym został postawiony następujący problem. Rozważamy dwa ciągi

$$(a_1, \ldots, a_k) \quad \text{oraz} \quad (b_1, \ldots, b_l),$$

których wyrazy są liczbami naturalnymi. Pytamy, które z takich ciągów mają tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\frac{(a_1 n)! \cdot \ldots \cdot (a_k n)!}{(b_1 n)! \cdot \ldots \cdot (b_l n)!}$$

jest całkowita. Problem ten jest w całości rozwiązany dla $l = k + 1$. Rozważamy zatem liczby postaci

$$\frac{(a_1 n)! \cdot \ldots \cdot (a_k n)!}{(b_1 n)! \cdot \ldots \cdot (b_k n)! \cdot (b_{k+1} n)!}$$

Okazało się, że istnieją trzy serie takich ciągów oraz 52 tzw. rozwiązania sporadyczne. Popatrzmy najpierw na te trzy serie.

Seria 1. Niech r i s będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Wtedy pierwszą serię tworzą następujące ciągi długości 1 i 2 (tzn. $k = 1$):

$$(a_1) = (r + s) \quad \text{oraz} \quad (b_1, b_2) = (r, s).$$

Inaczej mówiąc, dla każdej liczby naturalnej n liczby postaci

$$\frac{(rn + sn)!}{(rn)! \cdot (sn)!}$$

są całkowite. Zauważmy, że jest to szczególny przypadek liczb rozpatrywanych w zadaniu 1.

Seria 2. Niech r i s będą dowolnymi liczbami naturalnymi takaimi, że $r > s$. Wtedy drugą serię tworzą na stępujące ciągi długości 2 i 3 (tzn. $k = 2$):

$$(a_1, a_2) = (2r, s) \quad \text{oraz} \quad (b_1, b_2, b_3) = (r, 2s, r - s).$$

Inaczej mówiąc, dla każdej liczby naturalnej n liczby postaci

$$\frac{(2rn)! \cdot (sn)!}{(rn)! \cdot (2sn)! \cdot \big((r - s)n\big)!}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

są całkowite. Tę serię możemy zapisać nieco inaczej. Przyjmijmy $t = r-s$, czyli $r = t+s$. Wówczas możemy zapisać oba ciągi w postaci:

$$(a_1, a_2) = (2s + 2t, s) \quad \text{oraz} \quad (b_1, b_2, b_3) = (t + s, 2s, t).$$

Inaczej mówiąc, dla każdej liczby naturalnej n liczby postaci

$$\frac{\big((2s + 2t)n\big)! \cdot (sn)!}{\big((t + s)n\big)! \cdot (2sn)! \cdot (tn)!}$$

są całkowite. Zauważmy, że liczby występujące w zadaniu 8 pochodziły z tej serii (dla $t = 1$ i $s = 2$). Ogólnie, liczby występujące w tej serii są szczególnymi przypadkami liczb postaci:

$$\frac{(2m + 2n)! \cdot m!}{n! \cdot (m + n)! \cdot (2m)!}.$$

Pozostawię, jako dość łatwe ćwiczenie, wykazanie, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n powyższe liczby są całkowite. Główny pomysł dowodu polega na wykazaniu nierówności

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \leq \lfloor 2x + 2y \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Seria 3. Niech r i s będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Wtedy trzecią serię ciągów tworzą następujące ciągi długości 2 i 3 (tzn. w tej serii także $k = 2$):

$$(a_1, a_2) = (2r, 2s) \quad \text{oraz} \quad (b_1, b_2, b_3) = (r, s, r + s).$$

Inaczej mówiąc, dla każdej liczby naturalnej n liczby postaci

$$\frac{(2rn)! \cdot (2sn)!}{(rn)! \cdot (sn)! \cdot \big((r + s)n\big)!}$$

są całkowite. Zauważmy, że są to szczególne przypadki liczb występujących w zadaniu 9.

Wreszcie popatrzmy na następującą tabelkę, w której zostały zebrane wszystkie ciągi sporadyczne. Zauważmy, że liczby występujące w zadaniu 7 znajdują się w tej tabelce pod numerem 1. Liczby rozpatrywane przez Czebyszewa znajdują się pod numerem 31.

Tę tabelkę przytaczam za pracą:

Jonathan W. Bober, *Factorial Ratios, Hypergeometric Series and a Family of Step Functions* (znalezioną w Internecie, z datą na pracy: 3 lutego 2008 r.).

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Nr	$(a_1, \ldots, a_k)$	$(b_1, \ldots, b_{k+1})$	Nr	$(a_1, \ldots, a_k)$	$(b_1, \ldots, b_{k+1})$
1	$(12, 1)$	$(6, 4, 3)$	27	$(15, 4)$	$(8, 6, 5)$
2	$(12, 3, 2)$	$(6, 6, 4, 1)$	28	$(30, 5, 4)$	$(15, 10, 8, 6)$
3	$(12, 1)$	$(8, 3, 2)$	29	$(15, 2)$	$(10, 4, 3)$
4	$(12, 3)$	$(8, 6, 1)$	30	$(30, 3, 2)$	$(15, 10, 6, 4)$
5	$(12, 3)$	$(6, 5, 4)$	31	$(30, 1)$	$(15, 10, 6)$
6	$(12, 5)$	$(10, 4, 3)$	32	$(15, 2)$	$(10, 6, 1)$
7	$(18, 1)$	$(9, 6, 4)$	33	$(15, 7)$	$(14, 5, 3)$
8	$(9, 2)$	$(6, 4, 1)$	34	$(30, 5, 3)$	$(15, 10, 7, 6)$
9	$(9, 4)$	$(8, 3, 2)$	35	$(30, 5, 3)$	$(15, 12, 10, 1)$
10	$(18, 4, 3)$	$(9, 8, 6, 2)$	36	$(15, 6, 1)$	$(12, 5, 3, 2)$
11	$(9, 1)$	$(5, 3, 2)$	37	$(15, 1)$	$(8, 5, 3)$
12	$(18, 5, 3)$	$(10, 9, 6, 1)$	38	$(30, 5, 3, 2)$	$(15, 10, 8, 6, 1)$
13	$(18, 4)$	$(12, 9, 1)$	39	$(20, 3)$	$(12, 10, 1)$
14	$(12, 2)$	$(9, 4, 1)$	40	$(20, 6, 1)$	$(12, 10, 3, 2)$
15	$(18, 2)$	$(9, 6, 5)$	41	$(20, 1)$	$(10, 8, 3)$
16	$(10, 6)$	$(9, 5, 2)$	42	$(20, 3, 2)$	$(10, 8, 6, 1)$
17	$(14, 3)$	$(9, 7, 1)$	43	$(20, 1)$	$(10, 7, 4)$
18	$(18, 3, 2)$	$(9, 7, 6, 1)$	44	$(20, 7, 2)$	$(14, 10, 4, 1)$
19	$(12, 2)$	$(7, 4, 3)$	45	$(20, 3)$	$(10, 9, 4)$
20	$(14, 6, 4)$	$(12, 7, 3, 2)$	46	$(20, 9, 6)$	$(18, 10, 4, 3)$
21	$(14, 1)$	$(7, 5, 3)$	47	$(24, 1)$	$(12, 8, 5)$
22	$(10, 6, 1)$	$(7, 5, 3, 2)$	48	$(24, 5, 2)$	$(12, 10, 8, 1)$
23	$(15, 1)$	$(9, 5, 2)$	49	$(24, 4, 1)$	$(12, 8, 7, 2)$
24	$(30, 9, 5)$	$(18, 15, 10, 1)$	50	$(24, 7, 4)$	$(14, 12, 8, 1)$
25	$(15, 4)$	$(12, 5, 2)$	51	$(24, 4, 3)$	$(12, 9, 8, 2)$
26	$(30, 5, 4)$	$(15, 12, 10, 2)$	52	$(24, 9, 6, 4)$	$(18, 12, 8, 3, 2)$

Na zakończenie zasygnalizuję inne sposoby wykazania, że liczby rozważane w zadaniach są całkowite. Zacznę od liczb rozpatrywanych przez Catalana:

$$C_{m,n} = \frac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!}.$$

Wówczas można dość łatwo pokazać, że

$$C_{m,0} = \binom{2m}{m},$$
$$C_{m,n+1} = 4C_{m,n} - C_{m+1,n}.$$

Stąd łatwo wynika przez indukcję, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczby $C_{m,n}$ są całkowite.

Następnie popatrzmy na liczby będące tematem zadania E3107 (w czasopiśmie *The American Mathematical Monthly*, vol. 92, No 8 (Oct. 1985), s. 591, rozwiązanie: vol. 95,

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

No 1 (Jan. 1988), s. 53–54), zaproponowanego przez I. Gessela:

$$G_{m,n} = \frac{(2m+2n)! \cdot m!}{n! \cdot (m+n)! \cdot (2m)!}.$$

Otóż można udowodnić, że

$$\begin{aligned} G_{m,0} &= 1, \\ G_{0,n} &= \binom{2n}{n}, \\ G_{m,n} &= 4G_{m,n-1} + G_{m-1,n}. \end{aligned}$$

Stąd także łatwo wynika przez indukcję, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczby $G_{m,n}$ są całkowite.

Można także udowodnić, że

$$G_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} 2^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2m+k-1}{k} \binom{2n-k}{n-k} 2^{k}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Tożsamości kombinatoryczne

Dowody algebraiczne i kombinatoryczne

Sumy skończone

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} a_{k,m} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=m}^{n} a_{k,m}$$

Kilka przydatnych wielomianów

Wzór dwumianowy Newtona:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n = (a+b)^n$$

Po podstawieniach $a = 1,\ b = x$ oraz $a = x,\ b = 1$ otrzymamy następujące równości wielomianów:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n = (1+x)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} = (x+1)^n$$

Suma skończonego ciągu geometrycznego:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Po podstawieniu $a = 1 + x$ otrzymamy:

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{1}{x} \cdot \left((1+x)^{n+1} - 1\right) = \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^k$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą równość wielomianów:

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^k$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Udowodnij następujące tożsamości kombinatoryczne (przy odpowiednio dobranych założeniach):

1. $\binom{n}{0} = 1$

2. $\binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

5. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

6. $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

8. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

9. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

10. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k = (-1)^n$

11. $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2\cdot(-1)^n}{3}$

12. $\sum_{k=0}^{24} \binom{100}{4k+1} = 2^{98}$

13. $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

14. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

15. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

16. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

17. $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$

18. $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$

19. $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

20. $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \binom{n+1}{3}$

21. $\sum_{k=m}^{n-1} (n-k)\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+2}$

22. $\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{2}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+3}$

23. $\sum_{k=2}^{n-1} (n-k)\binom{k}{2} = \binom{n+1}{4}$

24. $\sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2} = \binom{n+1}{4}$

25. $\sum_{k=m}^{n-m} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1}$

Życzę powodzenia!

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Dowody algebraiczne

1. Podstawianie i porównywanie współczynników

W tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

podstawiamy $x=0$. Otrzymujemy równość

$$\binom{n}{0}=1. \tag{1}$$

W tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}=(x+1)^n$$

także podstawiamy $x=0$. Otrzymujemy równość

$$\binom{n}{n}=1. \tag{2}$$

Następnie w sumie

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=(x+1)^n=(1+x)^n$$

zmieniamy kolejność sumowania:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k.$$

Mamy zatem równość

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k.$$

Porównując współczynniki przy x^k dla $k=0,1,2,\ldots,n$, otrzymujemy tożsamość

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}. \tag{3}$$

Następnie zauważmy, że

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)\cdot(1+x)^n=(1+x)^n+x(1+x)^n.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Mamy zatem następującą równość wielomianów:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + x\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k =$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^k + x^{n+1}.$$

Porównując współczynniki stojące przy x^k dla $k = 1, 2, \ldots, n$, otrzymujemy tożsamość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{4}$$

Dowody tożsamości podanych w zadaniach 5 i 6 przedstawię w rozdziale o pochodnych wielomianów.

Następnie w tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

podstawiamy najpierw $x = 1$, a potem $x = 2$. Otrzymujemy następujące tożsamości kombinatoryczne:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k = (1+1)^n = 2^n \tag{7}$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n. \tag{8}$$

Wreszcie w tej samej tożsamości podstawiamy $x = -1$ oraz $x = -2$. Otrzymujemy następujące tożsamości kombinatoryczne:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = 0 \tag{9}$$

(jeśli $n > 0$) oraz

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^k = (1-2)^n = (-1)^n. \tag{10}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Przejdziemy następnie do dowodu tożsamości z zadania 11. W tym celu weźmy zespolony, nierzeczywisty pierwiastek trzeciego stopnia z jedności:

$$\varepsilon^3 = 1.$$

Wtedy ε jest pierwiastkiem równania $x^3 - 1 = 0$, czyli $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Ponieważ ε jest pierwiastkiem nierzeczywistym, więc $\varepsilon \neq 1$. Stąd wynika, że ε spełnia równanie

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Obliczymy teraz dwoma sposobami sumę

$$(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n}.$$

Najpierw skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} = \\
&= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{0\cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{1\cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{2\cdot k} = \\
&= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (\varepsilon^0 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}).
\end{aligned}$$

Popatrzmy teraz, jak wyglądają sumy

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}$$

dla różnych k. Oczywiście dla liczb k podzielnych przez 3 dodajemy do siebie trzy jedynki. Zatem suma jest równa 3. Niech teraz $k = 3l + 1$. Wtedy

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 1 + \varepsilon^{3l} \cdot \varepsilon + \varepsilon^{6l} \cdot \varepsilon^2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Podobnie dla $k = 3l + 2$ stwierdzimy, że ta suma jest równa 0. Zatem, kontynuując przerwane obliczenia, dostajemy

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (\varepsilon^0 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}) = \sum_{k=0}^{n} 3\binom{3n}{3k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}.$$

Następnie obliczymy tę samą sumę bez odwoływania się do wzoru Newtona. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} = \\
&= (1+1)^{3n} + (1+\varepsilon)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} = \\
&= 2^{3n} + (-\varepsilon^2)^{3n} + (-\varepsilon)^{3n} = \\
&= 2^{3n} + (-1)^{3n}\varepsilon^{6n} + (-1)^{3n}\varepsilon^{3n} = \\
&= 2^{3n} + (-1)^n(\varepsilon^3)^n + (-1)^n(\varepsilon^3)^n = \\
&= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n = \\
&= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n.
\end{aligned}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

W tym dowodzie korzystaliśmy z oczywistych równości:

$$(-1)^{3n} = (-1)^n, \quad 1+\varepsilon = -\varepsilon^2, \quad 1+\varepsilon^2 = -\varepsilon.$$

Porównując wyniki obu obliczeń, otrzymamy:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = 8^n + 2 \cdot (-1)^n,$$

czyli ostatecznie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}. \tag{11}$$

Liczby zespolone wykorzystamy także w dowodzie tożsamości z zadania 12. Tym razem obliczymy sumę

$$(1+1)^{100} - (1-1)^{100} - \mathrm{i} \cdot (1+\mathrm{i})^{100} + \mathrm{i} \cdot (1-\mathrm{i})^{100}.$$

Oczywiście

$$(1+1)^{100} = 2^{100} \quad \text{oraz} \quad (1-1)^{100} = 0.$$

Następnie zauważmy, że

$$(1+\mathrm{i})^4 = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^2 = (1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^2 = (2\mathrm{i})^2 = -4$$

oraz

$$(1-\mathrm{i})^4 = \left((1-\mathrm{i})^2\right)^2 = (1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^2 = (-2\mathrm{i})^2 = -4.$$

Stąd wynika, że

$$(1+\mathrm{i})^{100} = \left((1+\mathrm{i})^4\right)^{25} = (-4)^{25} = -4^{25}$$

oraz

$$(1-\mathrm{i})^{100} = \left((1-\mathrm{i})^4\right)^{25} = (-4)^{25} = -4^{25}.$$

Zatem

$$(1+1)^{100} - (1-1)^{100} - \mathrm{i} \cdot (1+\mathrm{i})^{100} + \mathrm{i} \cdot (1-\mathrm{i})^{100} = 2^{100} - 0 + 4^{25}\mathrm{i} - 4^{25}\mathrm{i} = 2^{100}.$$

Teraz tę samą sumę obliczymy korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona. Mamy

$$(1+1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k},$$

$$(1-1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-1)^k,$$

$$(1+\mathrm{i})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \mathrm{i}^k,$$

$$(1-\mathrm{i})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-\mathrm{i})^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}
2^{100} &= (1+1)^{100} - (1-1)^{100} - \mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})^{100} + \mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})^{100} = \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(1-(-1)^k - \mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^k + \mathrm{i}\cdot(-1)^k\cdot\mathrm{i}^k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(\left(1-(-1)^k\right) - \mathrm{i}^{k+1}\cdot\left(1-(-1)^k\right)\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(1-(-1)^k\right)\cdot\left(1-\mathrm{i}^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że jeśli k jest liczbą parzystą, to

$$1-(-1)^k = 1-1 = 0.$$

Jeśli zaś k jest liczbą nieparzystą, to

$$1-(-1)^k = 1-(-1) = 2.$$

Następnie zauważmy, że jeśli $k = 4l+1$, to $k+1 = 4l+2$ i wtedy

$$1-\mathrm{i}^{k+1} = 1-\mathrm{i}^{4l+2} = 1-(-1)^{2l+1} = 1-(-1) = 2.$$

Jeśli natomiast $k = 4l+3$, to $k+1 = 4l+4$ i wtedy

$$1-\mathrm{i}^{k+1} = 1-\mathrm{i}^{4l+4} = 1-(-1)^{2l+2} = 1-1 = 0.$$

Podsumowując:

$$\left(1-(-1)^k\right)\cdot\left(1-\mathrm{i}^{k+1}\right) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } k \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 0, & \text{jeśli } k = 4l+3 \text{ dla pewnej liczby } l, \\ 4, & \text{jeśli } k = 4l+1 \text{ dla pewnej liczby } l. \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
2^{100} &= (1+1)^{100} - (1-1)^{100} - \mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})^{100} + \mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})^{100} = \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(1-(-1)^k\right)\cdot\left(1-\mathrm{i}^{k+1}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{24}\binom{100}{4k+1}\cdot 4 = \\
&= 4\cdot\sum_{k=0}^{24}\binom{100}{4k+1}.
\end{aligned}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

W ten sposób pokazaliśmy, że

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{24} \binom{100}{4k+1} = 2^{100},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{24} \binom{100}{4k+1} = 2^{98}. \tag{12}$$

2. Mnożenie wielomianów

Przypuśćmy, że mamy dane dwa wielomiany

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$
$$W(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

gdzie $a_m \neq 0$ oraz $b_n \neq 0$. Przyjmijmy $a_k = 0$ i $b_l = 0$ dla $k \geq m+1$ oraz $l \geq n+1$. Możemy wówczas zapisać nasze wielomiany w postaci:

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots,$$
$$W(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots.$$

Te sumy oczywiście są nadal skończone, mimo iż zostały zapisane jako nieskończone. Iloczyn wielomianów $V(x) \cdot W(x)$ ma teraz postać:

$$V(x) \cdot W(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \ldots,$$

gdzie

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Zauważmy, że $c_k = 0$ dla $k \geq m+n+1$ oraz $c_{m+n} = a_m b_n$. Zatem stopień wielomianu $V(x) \cdot W(x)$ jest równy $m+n$.

Weźmy teraz następujące dwa wielomiany:

$$V(x) = (1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k,$$
$$W(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Przyjmijmy zatem

$$a_0 = \binom{m}{0}, \quad a_1 = \binom{m}{1}, \ldots, a_m = \binom{m}{m} \quad \text{oraz} \quad a_k = 0 \quad \text{dla } k \geq m+1$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

oraz

$$b_0 = \binom{n}{0}, \quad b_1 = \binom{n}{1}, \ldots, b_n = \binom{n}{n} \quad \text{oraz} \quad b_k = 0 \quad \text{dla } k \geq n+1.$$

Wówczas

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots,$$
$$W(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots.$$

Obliczmy teraz współczynnik c_r stojący przy x^r w iloczynie wielomianów $V(x) \cdot W(x)$. Z jednej strony mamy

$$V(x) \cdot W(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \ldots,$$

gdzie

$$c_r = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r} \binom{n}{r-k}.$$

Z drugiej strony mamy

$$V(x) \cdot W(x) = (1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k.$$

Zatem współczynnik c_r stojący przy przy x^r jest równy

$$c_r = \binom{m+n}{r}.$$

Udowodniliśmy zatem tożsamość kombinatoryczną, zwaną tożsamością Vandermonde'a (lub Cauchy'ego-Vandermonde'a):

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}. \tag{13}$$

Podstawiając $r = m = n$ w powyższej tożsamości, otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{14}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

3. Pochodna wielomianu

Przypuśćmy, że dany jest wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Wtedy **pochodną** tego wielomianu nazywamy wielomian określony za pomocą następującego wzoru:

$$W'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1.$$

Zauważmy, że pochodna wielomianu $W(x)$ jest wielomianem stopnia dokładnie o 1 niższego niż stopień wielomianu $W(x)$. Zauważmy także, że definicja pochodnej wielomianu jest czysto algebraiczna; nie odwołuje się do pojęcia granicy.

Udowodnimy w sposób czysto algebraiczny dwa dobrze znane wzory: na pochodną sumy i iloczynu wielomianów. Najpierw udowodnimy, że

$$\big(W(x) + V(x)\big)' = W'(x) + V'(x).$$

Niech zatem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

oraz

$$V(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $m = n$:

$$V(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Wówczas

$$W'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$$

oraz

$$V'(x) = nb_n x^{n-1} + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2b_2x + b_1.$$

Teraz mamy

$$\begin{aligned}
&\big(W(x) + V(x)\big)' = \\
&= \big((a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\big)' = \\
&= n(a_n + b_n)x^{n-1} + (n-1)(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-2} + \ldots + 2(a_2 + b_2)x + (a_1 + b_1) = \\
&= \big(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1\big) + \\
&\quad + \big(nb_n x^{n-1} + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2b_2x + b_1\big) = \\
&= W'(x) + V'(x).
\end{aligned}$$

To kończy dowód.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Następnie udowodnimy, że

$$\big(W(x)\cdot V(x)\big)' = W'(x)\cdot V(x) + W(x)\cdot V'(x).$$

Zaczynamy od przypadku, w którym

$$W(x) = a_k x^k,$$
$$V(x) = b_l x^l.$$

Wówczas

$$\big(W(x)\cdot V(x)\big)' = \big(a_k b_l x^{k+l}\big)' = (k+l)a_k b_l x^{k+l-1}$$

oraz

$$\begin{aligned} W'(x)\cdot V(x) + W(x)\cdot V'(x) &= k a_k x^{k-1}\cdot b_l x^l + a_k x^k \cdot l b_l x^{l-1} = \\ &= k a_k b_l x^{k+l-1} + l a_k b_l x^{k+l-1} = (k+l)a_k b_l x^{k+l-1} = \\ &= \big(W(x)\cdot V(x)\big)'. \end{aligned}$$

Niech teraz

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

oraz

$$V(x) = b_l x^l.$$

Przyjmijmy:

$W_n(x) = a_n x^n,\ W_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1},\ \ldots,\ W_2(x) = a_2 x^2,\ W_1(x) = a_1 x,\ W_0(x) = a_0.$

Wówczas

$$W(x) = W_n(x) + W_{n-1}(x) + \ldots + W_2(x) + W_1(x) + W_0(x).$$

Teraz dla każdego k mamy

$$\big(W_k(x)\cdot V(x)\big)' = W_k'(x)\cdot V(x) + W_k(x)\cdot V'(x).$$

Zatem:

$$\begin{aligned} &\big(W(x)\cdot V(x)\big)' = \\ &= \big(W_n(x)\cdot V(x) + W_{n-1}(x)\cdot V(x) + \ldots + W_1\cdot V(x) + W_0(x)\cdot V(x)\big)' = \\ &= \big(W_n(x)\cdot V(x)\big)' + \big(W_{n-1}(x)\cdot V(x)\big)' + \ldots + \big(W_1\cdot V(x)\big)' + \big(W_0(x)\cdot V(x)\big)' = \\ &= \big(W_n'(x)\cdot V(x) + W_n(x)\cdot V'(x)\big) + \big(W_{n-1}'(x)\cdot V(x) + W_{n-1}\cdot V'(x)\big) + \ldots + \\ &\quad + \big(W_1'\cdot V(x) + W_1(x)\cdot V'(x)\big) + \big(W_0'(x)\cdot V(x) + W_0(x)\cdot V'(x)\big) = \\ &= \big(W_n'(x)\cdot V(x) + W_{n-1}'(x)\cdot V(x) + \ldots + W_1'\cdot V(x) + W_0'(x)\cdot V(x)\big) + \\ &\quad + \big(W_n(x)\cdot V'(x) + W_{n-1}\cdot V'(x) + \ldots + W_1(x)\cdot V'(x) + W_0(x)\cdot V'(x)\big) = \\ &= \big(W_n'(x) + W_{n-1}'(x) + \ldots + W_1' + W_0'(x)\big)\cdot V(x) + \\ &\quad + \big(W_n(x) + W_{n-1} + \ldots + W_1(x) + W_0(x)\big)\cdot V'(x) = \\ &= \big(W_n(x) + W_{n-1}(x) + \ldots + W_1 + W_0(x)\big)'\cdot V(x) + W(x)\cdot V'(x) = \\ &= W'(x)\cdot V(x) + W(x)\cdot V'(x). \end{aligned}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

W podobny sposób dowodzimy tej równości dla dowolnych wielomianów.

Teraz przez indukcję względem n łatwo dowodzimy, że jeśli $W(x) = (1+x)^n$, to

$$W'(x) = n(1+x)^{n-1}.$$

Szczegóły dowodu pozostawię jako ćwiczenie.

Przyjrzyjmy się jeszcze raz równości wielomianów

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Wyznaczmy pochodne wielomianów stojących po obu stronach tej równości:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}.$$

Porównując współczynniki stojące przy x^{k-1} dla $k = 1, 2, \ldots, n$, otrzymujemy tożsamość kombinatoryczną

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \tag{5}$$

Popatrzmy teraz na uzyskaną równość wielomianów:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

czyli

$$1 \cdot \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Wyznaczmy pochodne wielomianów stojących po obu stronach tej ostatniej równości:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2},$$

czyli

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zmieniając granice sumowania po prawej stronie, otrzymamy równość

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} = n(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}.$$

Porównując współczynniki stojące przy x^{k-2} dla $k = 2, 3, \ldots, n$, otrzymujemy tożsamość

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Po podzieleniu obu stron ostatniej równości przez 2! otrzymujemy tożsamość

$$\binom{n}{k}\binom{k}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}.$$

Powtarzając to rozumowanie odpowiednią liczbę razy, otrzymamy tożsamość

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}. \tag{6}$$

Szczegóły dowodu (najlepiej przez indukcję względem m) pozostawię jako ćwiczenie.

Przejdziemy teraz do zadań 15 i 16. Popatrzmy na równość wielomianów

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

czyli

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$$

Wyznaczmy pochodne wielomianów stojących po obu stronach równości:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Podstawiając $x = 1$, otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}. \tag{15}$$

Wreszcie wyznaczmy pochodne wielomianów stojących po obu stronach równości

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli

$$n + \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Otrzymamy równość

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

Znów podstawimy $x = 1$. Otrzymamy tożsamość

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}. \tag{16}$$

Popatrzmy jeszcze raz na równość wielomianów

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}x^k,$$

czyli

$$1 + \sum_{k=1}^{n} (1+x)^k = n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1}x^k.$$

Wyznaczmy pochodne wielomianów stojących po obu stronach równości:

$$\sum_{k=1}^{n} k(1+x)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k+1}x^{k-1}.$$

Po podstawieniu $x = 0$ otrzymamy tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}. \tag{17}$$

Tę tożsamość udowodnimy także w inny sposób w następnym rozdziale.

4. Uogólnienia wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego

Przypomnijmy następującą równość wielomianów:

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}x^k.$$

Zdefiniujmy wielomian $S_1(x)$ wzorem:

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(1+x)^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Wówczas mamy

$$(1+x)\cdot S_1(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(1+x)^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(1+x)^k.$$

Stąd otrzymujemy:

$$x\cdot S_1(x)=(1+x)\cdot S_1(x)-S_1(x)=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(1+x)^k-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(1+x)^k=$$

$$=(1+x)^n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)(1+x)^k-\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(1+x)^k-n(1+x)^0=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\big((n-k+1)-(n-k)\big)(1+x)^k+(1+x)^n-n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(1+x)^k+(1+x)^n-n=\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k-(n+1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k-\binom{n+1}{1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^{k+1}.$$

Zatem

$$S_1(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równość wielomianów

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k.$$

Zamieniając kolejność sumowania w wielomianie po lewej stronie, otrzymujemy równość

$$\sum_{k=1}^{n}k(1+x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k.$$

Po podstawieniu $x=0$ otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}. \tag{17}$$

Zauważmy, że otrzymane równości wielomianów możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k}{1}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

oraz

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}(1+x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k.$$

Następnie definiujemy wielomian $S_2(x)$ wzorem:

$$S_2(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k.$$

Wówczas mamy

$$(1+x)\cdot S_2(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-k+1}{2}(1+x)^k.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
x\cdot S_2(x)&=(1+x)\cdot S_2(x)-S_2(x)=\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-k+1}{2}(1+x)^k-\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k=\\
&=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-k+1}{2}(1+x)^k-\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k-\binom{n}{2}=\\
&=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\binom{n-k+1}{2}-\binom{n-k}{2}\right)(1+x)^k-\binom{n}{2}=\\
&=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-k}{1}(1+x)^k-\binom{n}{2}=\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k}{1}(1+x)^k-\binom{n}{1}-\binom{n}{2}=\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k-\binom{n+1}{2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^{k+1}
\end{aligned}$$

Zatem

$$S_2(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^k.$$

W ten sposób udowodniliśmy następującą równość wielomianów:

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Po zmianie kolejności sumowania otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}(1+x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^k.$$

Wreszcie, podstawiając $x=0$, otrzymujemy tożsamość kombinatoryczną

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}. \tag{18}$$

Zdefiniujmy także wielomian $S_0(x)$ wzorem:

$$S_0(x)=\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-0}\binom{n-k}{0}(1+x)^k.$$

Wówczas mamy następujące równości wielomianów:

$$S_0(x)=\sum_{k=0}^{n-0}\binom{n-k}{0}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k,$$

$$S_1(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k}{1}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}x^k,$$

$$S_2(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^k.$$

Zdefiniujmy wreszcie wielomian $S_m(x)$ wzorem:

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}(1+x)^k.$$

Powyższe równości sugerują, że prawdziwy jest wzór ogólny dla dowolnego m:

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+1}{k+m+1}x^k.$$

Udowodnimy przez indukcję względem m, że tak jest w istocie. Powtórzymy pomysł, który pozwolił wyprowadzić wzory na $S_1(x)$ i $S_2(x)$. Przyjmijmy, że

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}(1+x)^k$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

oraz że prawdziwy jest wzór

$$S_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-m+1} \binom{n-k}{m-1}(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n-m+1} \binom{n+1}{k+m} x^k.$$

Wówczas

$$(1+x)\cdot S_m(x) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-k}{m}(1+x)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-m+1} \binom{n-k+1}{m}(1+x)^k.$$

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned}
x\cdot S_m(x) &= (1+x)\cdot S_m(x) - S_m(x) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-m+1} \binom{n-k+1}{m}(1+x)^k - \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-k}{m}(1+x)^k = \\
&= (1+x)^{n-m+1} + \sum_{k=1}^{n-m} \binom{n-k+1}{m}(1+x)^k - \sum_{k=1}^{n-m} \binom{n-k}{m}(1+x)^k - \binom{n}{m} = \\
&= (1+x)^{n-m+1} + \sum_{k=1}^{n-m} \left(\binom{n-k+1}{m} - \binom{n-k}{m}\right)(1+x)^k - \binom{n}{m} = \\
&= (1+x)^{n-m+1} + \sum_{k=1}^{n-m} \binom{n-k}{m-1}(1+x)^k - \binom{n}{m} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-m+1} \binom{n-k}{m-1}(1+x)^k - \binom{n}{m-1} - \binom{n}{m} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-m+1} \binom{n+1}{k+m} x^k - \binom{n+1}{m} = \sum_{k=1}^{n-m+1} \binom{n+1}{k+m} x^k = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+1}{k+m+1} x^{k+1}
\end{aligned}$$

Zatem

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+1}{k+m+1} x^k,$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-k}{m}(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+1}{k+m+1} x^k.$$

Po zmianie kolejności sumowania po lewej stronie otrzymamy równość

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}(1+x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+1}{k+m+1} x^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Podstawienie $x = 0$ prowadzi do następującej tożsamości kombinatorycznej:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{19}$$

Powróćmy teraz do równości

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+2} x^k.$$

Przekształćmy lewą stronę w następujący sposób:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{k} (n-k) \binom{k}{m} x^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m}^{n-1} (n-k) \binom{k}{m} x^m.$$

W ten sposób otrzymaliśmy następującą równość wielomianów:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m}^{n-1} (n-k) \binom{k}{m} x^m = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+2} x^k = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m+2} x^m.$$

Porównując współczynniki przy x^m otrzymujemy następującą tożsamość kombinatoryczną:

$$\sum_{k=m}^{n-1} (n-k) \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+2}. \tag{21}$$

W szczególności dla $m = 1$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \binom{n+1}{3} \tag{20}$$

oraz dla $m = 2$ mamy

$$\sum_{k=2}^{n-1} (n-k) \binom{k}{2} = \binom{n+1}{4}. \tag{23}$$

Powróćmy teraz do równości

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{2} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n+1}{k+3} x^k.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Znów przekształcamy lewą stronę tej równości:

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-k}{2}\cdot\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{m=0}^{k}\binom{n-k}{2}\binom{k}{m}x^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{k=m}^{n-2}\binom{n-k}{2}\binom{k}{m}x^m.$$

Otrzymaliśmy zatem następującą równość wielomianów:

$$\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{k=m}^{n-2}\binom{n-k}{2}\binom{k}{m}x^m=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+3}x^k=\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n+1}{m+3}x^m.$$

Porówanie współczynników stojących przy x^m daje następującą tożsamość kombinatoryczną:

$$\sum_{k=m}^{n-2}\binom{n-k}{2}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+3}. \tag{22}$$

W szczególności dla $m=1$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n-2}k\binom{n-k}{2}=\binom{n+1}{4}. \tag{24}$$

Wreszcie powróćmy do równości

$$\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+1}{k+m+1}x^k.$$

Znów przekształcamy jej lewą stronę:

$$\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}\cdot\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l=\sum_{k=0}^{n-m}\sum_{l=0}^{k}\binom{n-k}{m}\binom{k}{l}x^l=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-m}\sum_{k=l}^{n-m}\binom{n-k}{m}\binom{k}{l}x^l$$

Otrzymujemy zatem równość

$$\sum_{l=0}^{n-m}\sum_{k=l}^{n-m}\binom{n-k}{m}\binom{k}{l}x^l=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+1}{k+m+1}x^k.$$

Porównując współczynniki przy x^m otrzymujemy tożsamość kombinatoryczną

$$\sum_{k=m}^{n-m}\binom{n-k}{m}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{2m+1}. \tag{25}$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Dodatki

Dodatek 1. Tożsamość von Szily'ego

W tym dodatku udowodnię następującą tożsamość:

$$\frac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}=\sum_k(-1)^k\binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n-k}.$$

Weźmy następujące dwa wielomiany:

$$V(x)=(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k,$$

$$W(x)=(1-x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k\binom{m+n}{k}x^k.$$

Wówczas iloczyn wielomianów $V(x)\cdot W(x)$ ma postać:

$$V(x)\cdot W(x)=\sum_k\sum_{j=0}^{k}\binom{m+n}{j}\cdot(-1)^{k-j}\binom{m+n}{k-j}\cdot x^k.$$

W szczególności dla $k=2m$ współczynnik przy x^{2m} jest równy:

$$\sum_{j=0}^{2m}\binom{m+n}{j}\cdot(-1)^{2m-j}\binom{m+n}{2m-j}=\sum_{j=0}^{2m}(-1)^{m+(m-j)}\binom{m+n}{m-(m-j)}\binom{m+n}{m+(m-j)}.$$

Z drugiej strony:

$$V(x)\cdot W(x)=(1-x^2)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k\binom{m+n}{k}x^{2k}.$$

Zatem współczynnik przy x^{2m} jest równy:

$$(-1)^m\cdot\binom{m+n}{m}.$$

Mamy więc tożsamość:

$$\sum_{j=0}^{2m}(-1)^{m+(m-j)}\binom{m+n}{m-(m-j)}\binom{m+n}{m+(m-j)}=(-1)^m\cdot\binom{m+n}{m}.$$

Po zmianie indeksu sumowania po lewej stronie, otrzymamy równość:

$$\sum_{k=-m}^{m}(-1)^{m+k}\binom{m+n}{m-k}\binom{m+n}{m+k}=(-1)^m\cdot\binom{m+n}{m},$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli

$$\sum_{k=-m}^{m} (-1)^k \binom{m+n}{m-k}\binom{m+n}{m+k} = \binom{m+n}{m}.$$

Ponieważ

$$\binom{m+n}{m-k} = \frac{(m+n)!}{(m-k)!\cdot(n+k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{m+n}{m+k} = \frac{(m+n)!}{(m+k)!\cdot(n-k)!},$$

więc

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{m-k}\binom{m+n}{m+k} &= \frac{\big((m+n)!\big)^2}{(m+k)!\cdot(m-k)!\cdot(n+k)!\cdot(n-k)!} = \\
&= \frac{\big((m+n)!\big)^2}{(2m)!\cdot(2n)!}\cdot\frac{(2m)!\cdot(2n)!}{(m+k)!\cdot(m-k)!\cdot(n+k)!\cdot(n-k)!} = \\
&= \frac{\big((m+n)!\big)^2}{(2m)!\cdot(2n)!}\cdot\frac{(2m)!}{(m+k)!\cdot(m-k)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n+k)!\cdot(n-k)!} = \\
&= \frac{\big((m+n)!\big)^2}{(2m)!\cdot(2n)!}\cdot\binom{2m}{m+k}\cdot\binom{2n}{n-k}.
\end{aligned}$$

Mamy zatem równość

$$\sum_{k=-m}^{m} (-1)^k \frac{\big((m+n)!\big)^2}{(2m)!\cdot(2n)!}\cdot\binom{2m}{m+k}\cdot\binom{2n}{n-k} = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!},$$

czyli

$$\frac{\big((m+n)!\big)^2}{(2m)!\cdot(2n)!}\cdot\sum_{k=-m}^{m} (-1)^k\cdot\binom{2m}{m+k}\cdot\binom{2n}{n-k} = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}.$$

Stąd dostajemy ostatecznie

$$\sum_{k=-m}^{m} (-1)^k\cdot\binom{2m}{m+k}\cdot\binom{2n}{n-k} = \frac{(2m)!\cdot(2n)!}{\big((m+n)!\big)^2}\cdot\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!} = \frac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}.$$

To kończy dowód.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Dodatek 2. Podzielność współczynników dwumianowych

W tym dodatku zajmę się następującym zagadnieniem. Dana jest liczba pierwsza p. Chcemy dowiedzieć się, dla jakich m i n współczynnik dwumianowy $\binom{m}{n}$ jest podzielny przez p. Najpierw udowodnię następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech m i n będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Niech następnie

$$m = pq + r, \quad n = ps + t \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r, t < p.$$

Wówczas

$$\binom{m}{n} = \binom{pq+r}{ps+t} \equiv \binom{q}{s} \cdot \binom{r}{t} \pmod{p}.$$

Dowód. Rozważmy następujący wielomian

$$W(x) = (1+x)^{pq+r} - (1+x)^r \cdot (1+x^p)^q.$$

Chcemy obliczyć współczynnik a_{ps+t} stojący w tym wielomianie przy x^{ps+t}. Zauważmy w tym celu, że

$$(1+x)^{pq+r} = \sum_{k=0}^{pq+r} \binom{pq+r}{k} x^k$$

oraz

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} b_k x^k,$$

gdzie współczynnik b_k jest określony wzorem:

$$b_k = \begin{cases} \binom{r}{k}, & \text{jeśli } k \leq r, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy następnie, że

$$(1+x^p)^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x^{pk} = \sum_{k=0}^{pq} c_k x^k,$$

gdzie współczynnik c_k jest określony następującym wzorem:

$$c_k = \begin{cases} \binom{q}{l}, & \text{jeśli } k = pl \text{ oraz } l \leq q, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stąd wynika, że współczynnik stojący przy x^{ps+t} jest równy:

$$a_{ps+t} = \binom{pq+r}{ps+t} - \sum_{k=0}^{ps+t} b_k \cdot c_{ps+t-k}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Ponieważ $b_k = 0$ dla $k > r$, więc

$$a_{ps+t} = \binom{pq+r}{ps+t} - \sum_{k=0}^{r} b_k \cdot c_{ps+t-k} = \binom{pq+r}{ps+t} - \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot c_{ps+t-k}.$$

Zajmijmy się teraz współczynnikiem c_{ps+t-k}. Wiemy, że $c_k = 0$ dla k niepodzielnych przez p. Stąd wynika, że jeśli $p \nmid t-k$, to $c_{ps+t-k} = 0$. Wiemy następnie, że

$$0 \leq t < p \quad \text{oraz} \quad 0 \leq k \leq r < p.$$

Stąd wynika, że

$$-p < t-k < p.$$

Wśród liczb $t-k$ spełniających powyższą nierówność jest tylko jedna liczba podzielna przez p: jest nią zero i wtedy $k = t$. Zatem

$$\begin{aligned} a_{ps+t} &= \binom{pq+r}{ps+t} - \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot c_{ps+t-k} = \binom{pq+r}{ps+t} - \sum_{k=t}^{t} \binom{r}{k} \cdot c_{ps+t-k} = \\ &= \binom{pq+r}{ps+t} - \binom{r}{t} \cdot c_{ps+t-t} = \binom{pq+r}{ps+t} - \binom{r}{t} \cdot \binom{q}{s}. \end{aligned}$$

Wykażę teraz, że ten współczynnik a_{ps+t} jest podzielny przez p. Przekształćmy zatem wielomian $W(x)$:

$$\begin{aligned} W(x) &= (1+x)^{pq+r} - (1+x)^r \cdot (1+x^p)^q = \\ &= (1+x)^r \cdot (1+x)^{pq} - (1+x)^r \cdot (1+x^p)^q = \\ &= (1+x)^r \cdot \big((1+x)^{pq} - (1+x^p)^q\big). \end{aligned}$$

Wykażę teraz, że wszystkie współczynniki wielomianu

$$V(x) = (1+x)^{pq} - (1+x^p)^q$$

są podzielne przez p. W tym celu skorzystam z następującej równości:

$$a^q - b^q = (a-b) \cdot (a^{q-1} + a^{q-2}b + \ldots + ab^{q-2} + b^{q-1}).$$

Wynika z niej, że dla dowolnych wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ istnieje wielomian $R(x)$ taki, że

$$P(x)^q - Q(q)^q = \big(P(x) - Q(x)\big) \cdot R(x).$$

W szczególności istnieje wielomian $R(x)$ taki, że

$$V(x) = \big((1+x)^p\big)^q - (1+x^p)^q = \big((1+x)^p - (1+x^p)\big) \cdot R(x).$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zajmijmy się wreszcie wielomianem

$$(1+x)^p - (1+x^p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k - (1+x^p) = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k.$$

Wystarczy wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $1 \leq k \leq p-1$, to

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

W tym celu zauważmy, że z zadania 5 wynika, że

$$k \cdot \binom{p}{k} = p \cdot \binom{p-1}{k-1}.$$

Ponieważ

$$p \cdot \binom{p-1}{k-1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWD}(p,k) = 1,$$

więc

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

To dowodzi, że współczynnik a_{ps+t} jest podzielny przez p, czyli

$$\binom{m}{n} = \binom{pq+r}{ps+t} \equiv \binom{q}{s} \cdot \binom{r}{t} \pmod{p}.$$

To kończy dowód twierdzenia.

Wniosek 1. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech m i n będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Niech następnie

$$m = a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad n = b_2p^2 + b_1p + b_0 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 < p.$$

Wówczas

$$\binom{m}{n} = \binom{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0} \equiv \binom{a_2}{b_2} \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0} \pmod{p}.$$

Dowód. Skorzystamy dwukrotnie z udowodnionego twierdzenia:

$$\binom{m}{n} = \binom{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0} = \binom{(a_2p + a_1)p + a_0}{(b_2p + b_1)p + b_0} \equiv \binom{a_2p + a_1}{b_2p + b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0} \equiv$$
$$\equiv \binom{a_2}{b_2} \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0} \pmod{p}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Wniosek 2. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech m i n będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Niech następnie

$$m = a_k p^k + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad n = b_k p^k + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0$$

oraz $0 \leq a_k, \ldots, a_2, a_1, a_0, b_k, \ldots, b_2, b_1, b_0 < p$. Wówczas

$$\binom{m}{n} = \binom{a_k p^k + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_k p^k + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \equiv \binom{a_k}{b_k} \cdot \ldots \cdot \binom{a_2}{b_2} \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0} \pmod{p}.$$

Dowód. Należy k-krotnie skorzystać z udowodnionego twierdzenia (lub przeprowadzić dowód przez indukcję względem k). Szczegóły dowodu pozostawię jako ćwiczenie.

Wniosek 3. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech m i n będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Niech następnie

$$m = a_k p^k + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad n = b_k p^k + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0$$

oraz $0 \leq a_k, \ldots, a_2, a_1, a_0, b_k, \ldots, b_2, b_1, b_0 < p$. Wówczas $p \mid \binom{m}{n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba j taka, że $0 \leq j \leq k$ oraz $a_j < b_j$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli $0 \leq a_j, b_j < p$, to $p \mid \binom{a_j}{b_j}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_j < b_j$.

Wniosek 4. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech m i n będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Niech następnie

$$m = a_k p^k + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq a_k, \ldots, a_2, a_1, a_0 < p.$$

Wówczas istnieje dokładnie

$$(a_k + 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_0 + 1)$$

liczb n takich, że $0 \leq n \leq m$ oraz $p \nmid \binom{m}{n}$.

Dowód. Istnieje dokładnie

$$(a_k + 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_0 + 1)$$

ciągów $(b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2, b_1, b_0)$ takich, że

$$0 \leq b_k \leq a_k, \quad \ldots, \quad 0 \leq b_2 \leq a_2, \quad 0 \leq b_1 \leq a_1 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq b_0 \leq a_0.$$

Wniosek 5. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $m = p^k - 1$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej n takiej, że $0 \leq n \leq m$ współczynnik dwumianowy $\binom{m}{n}$ jest niepodzielny przez p.

Dowód. Zauważmy, że

$$p^k - 1 = (p-1)p^{k-1} + (p-1)p^{k-2} + \ldots + (p-1)p^2 + (p-1)p + (p-1).$$

Następnie zauważmy, że jeśli $0 \leq n \leq m$, to

$$n = b_{k-1} p^{k-1} + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0,$$

gdzie $0 \leq b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0 \leq p - 1$. Teraz wystarczy skorzystać z wniosku 3.

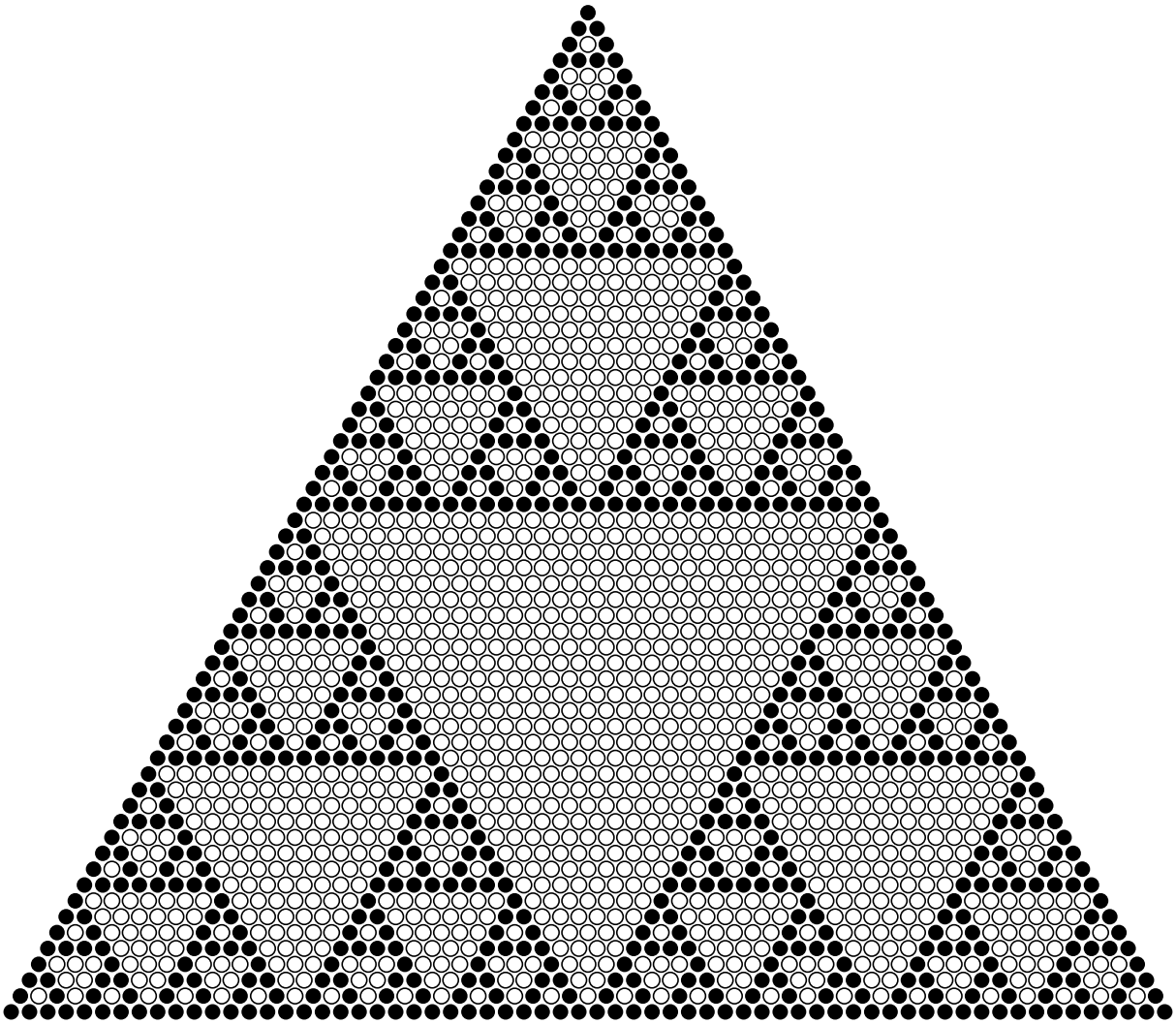
Wniosek 6. Niech $m = 2^k - 1$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej n takiej, że $0 \leq n \leq m$ współczynnik dwumianowy $\binom{m}{n}$ jest nieparzysty.

Dowód. Ten wniosek wynika natychmiast z wniosku 5.

Na zakończenie popatrzmy na pierwsze 64 wiersze trójkąta Pascala modulo 2 i modulo 3.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

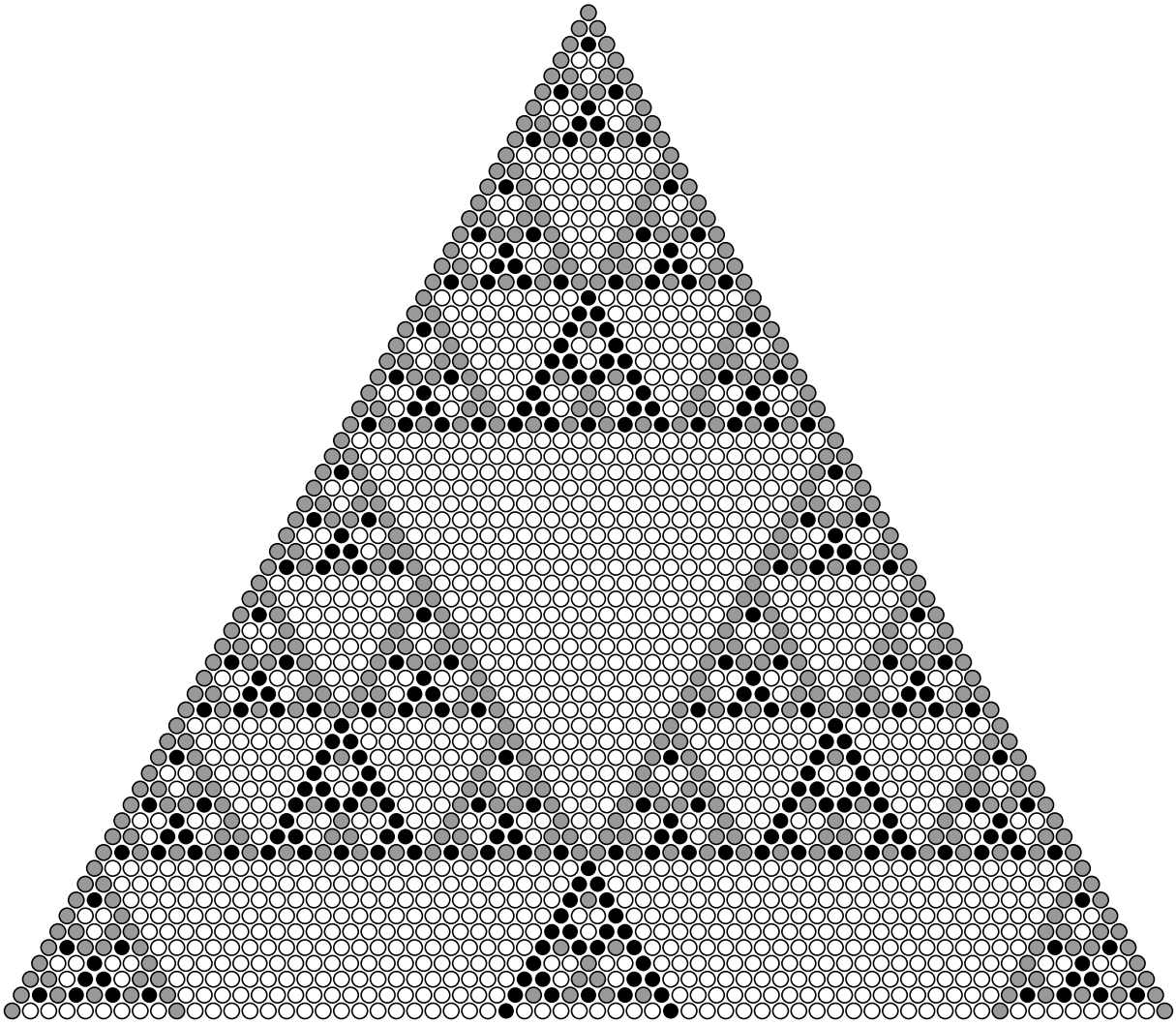
Trójkąt Pascala modulo 2



Czarnymi kółeczkami zaznaczone są liczby nieparzyste, białymi liczby parzyste.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

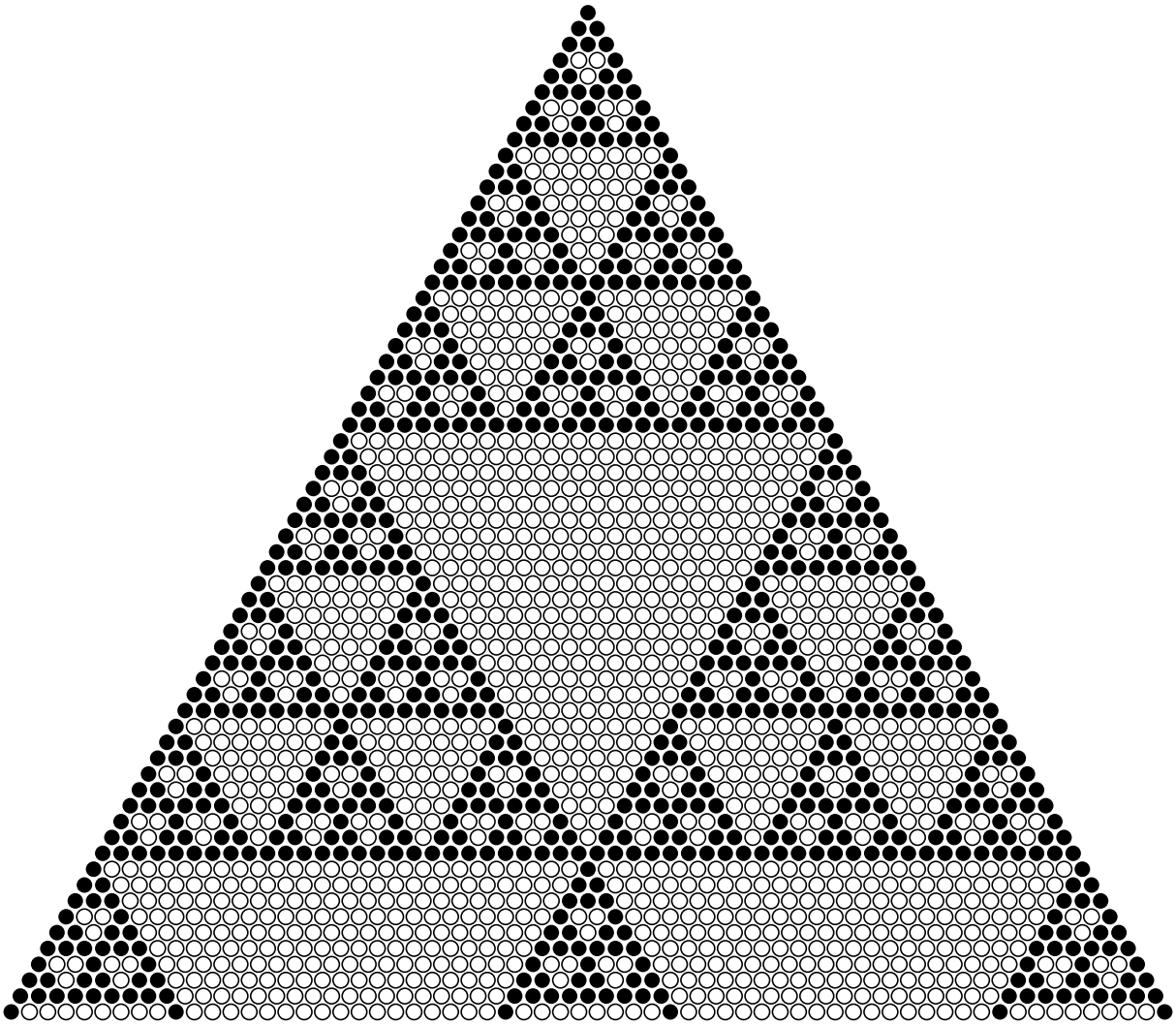
Trójkąt Pascala modulo 3



Czarnymi kółeczkami zaznaczone są liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2, szarymi liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1, białymi liczby podzielne przez 3.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Trójkąt Pascala modulo 3 — inaczej



Czarnymi kółeczkami zaznaczone są liczby niepodzielne przez 3, białymi liczby podzielne przez 3.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku